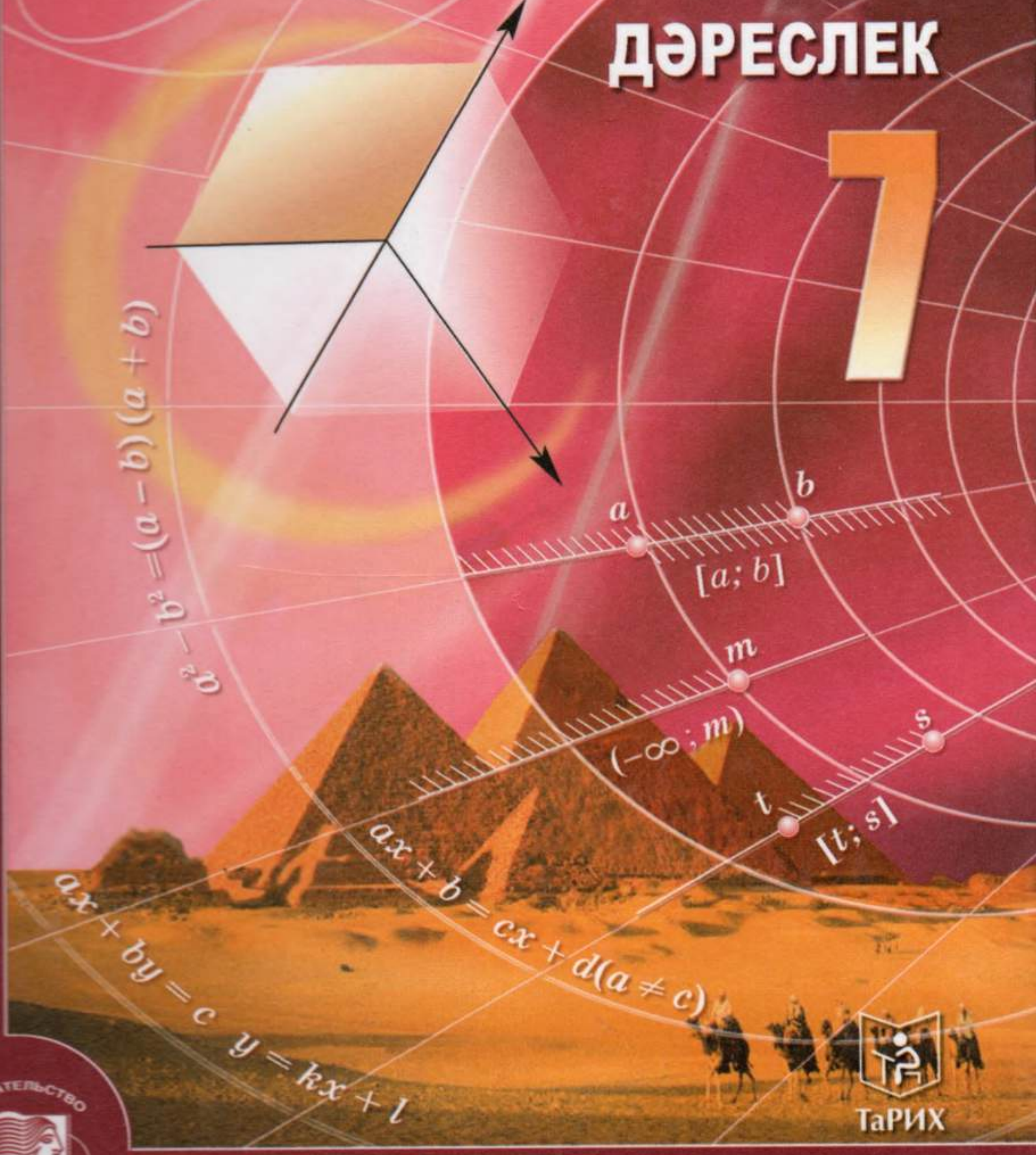
А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

1 кисәк

ДӘРЕСЛЕК

7



ТаРИХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

А. Г. МОРДКОВИЧ
Алгебра • 1 кисәк • ДӘРЕСЛЕК
7

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$ $\quad a^1 = a$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}}$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$

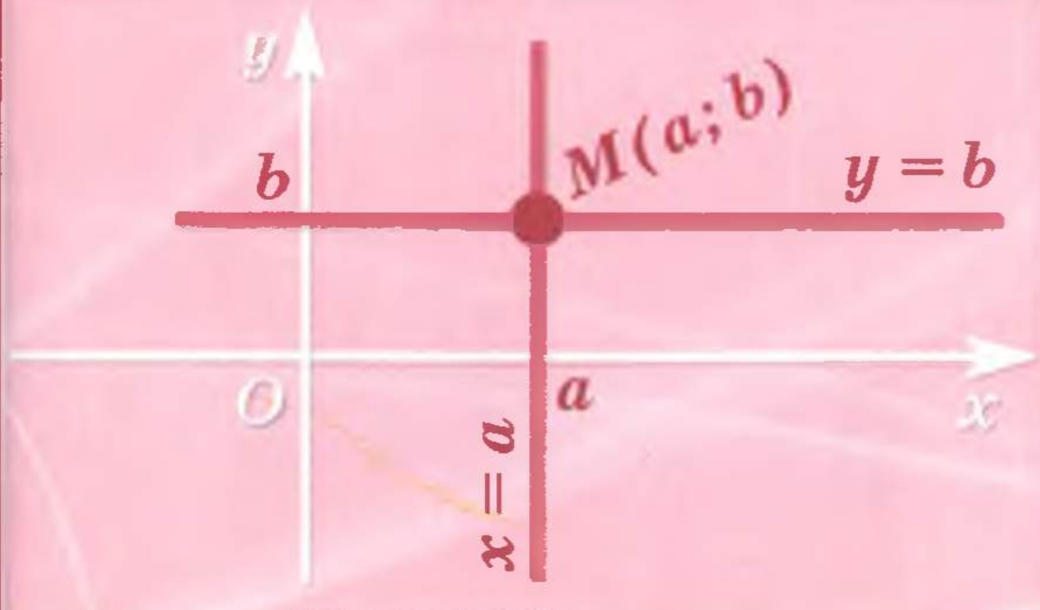
$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

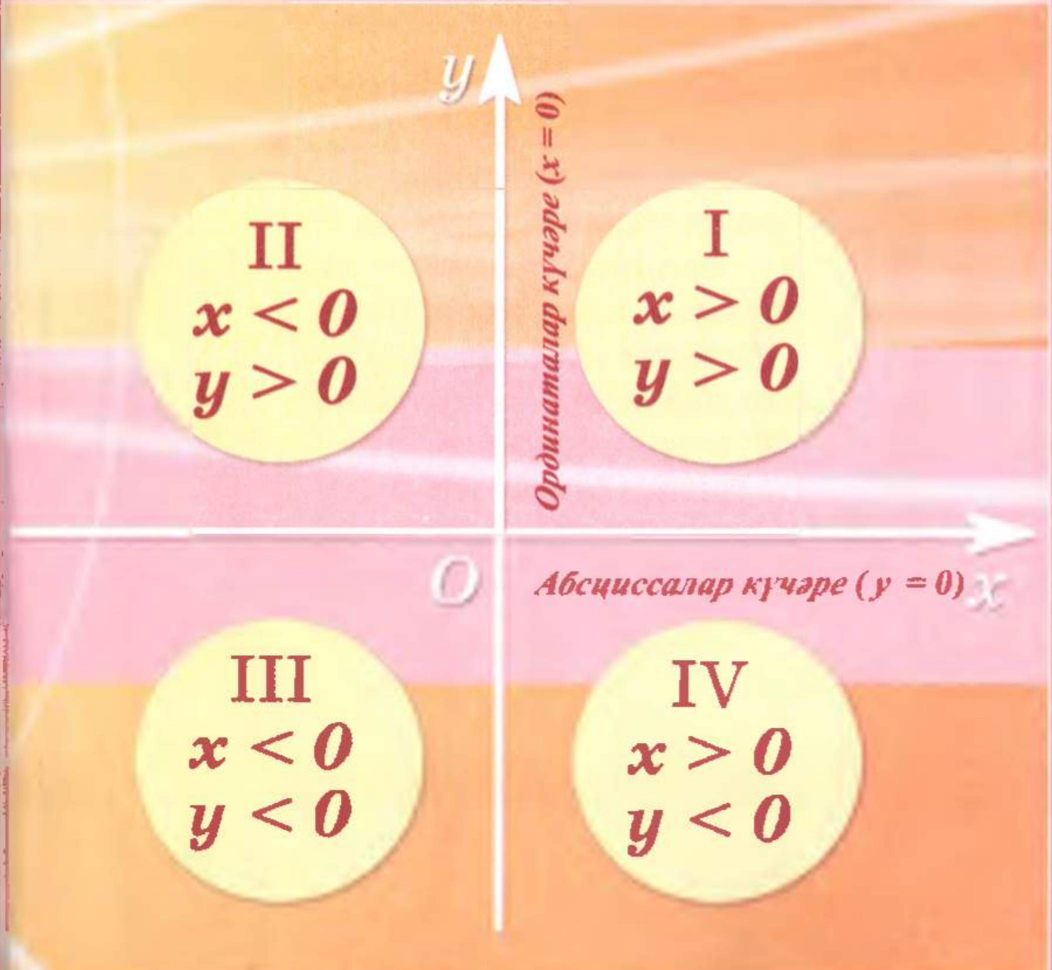
$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(a^n)^k = a^{nk}$$





А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

7 сыйныф

Ике кисәктә

1 кисәк

Гомуми белем бирү
учреждениеләре өчен
ДӘРЕСЛЕК

*Россия Федерациясе
Мәгариф һәм фән министрлыгы
тарафыннан тәкъдим ителгән*

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва · 2011 Казан · 2011

ТаРИХ

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

Мордкович А.Г.

М79 Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г.Мордкович. — 15-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2011. — 160 с. : ил.
ISBN 978-5-346-01746-2

Мордкович А.Г.

М79 Алгебра. 7 нче сыйныф. Ике кисәктән. 1 нче кисәк. Гомуми белем бирү учреждениеләре өчен д-лек / А.Г.Мордкович.— Русчадан **Р.С.Вафина** тәрҗ.— ҖЧҖ «Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты», 2011.— 160 б. : ил.
ISBN 978-5-94113-359-8

Дәреслекнең төп үзенчәлеге — анық проблемалы һәм үстерешле укыту принципларына нигезләнгән булуында. Китап хикәяләү стилендә, барлык укучылар өчен җиңел һәм аңлаешлы телдә язылган.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА

7 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

(Перевод с русского на татарский язык)

Редакторы *Ф.Ш.Шәкүрова*
Корректоры *Э.Ш.Рәхмәтуллина*
Компьютерда битләргә салучысы *В.М.Садыйкова*

Оригинал макеттан басарга кул куелды 05.10.2010.
Форматы 60x90 1/16. Офсет кәгазе. «Школьная» гарнитурасы.
Офсет басма. Басма табагы 10. Тиражы 2540 д.
Заказ Р-1582.

420111. Казан, Тельман ур., 5.
Хатлар өчен: 420014. Казан, Кремль, а/я 54.
Тел. (843)264-67-96.

«Татмедиа» ААҖ филиалы —
«Идел-ПРЕСС» полиграфия-нәшрият комплексы.
420066. Казан, Декабристлар урамы, 2.

ISBN 978-5-346-01746-2 (ч.1)
ISBN 978-5-346-01745-5 (общ.)
ISBN 978-5-94113-359-8

© «Мнемозина», 2011
© Оформление. «Мнемозина», 2011
Все права защищены
© Татарстан Республикасы «ХӘТЕР» нәшрияты, 2011

УКЫТУЧЫ ӨЧЕН КЕРЕШ СҮЗ

«Мнемозина» нәшрияты тарафыннан гомуми белем бирү мәктәбенең 7 нче сыйныфында алгебра курсын укыту өчен чыгарыла торган укыту-методик комплект* составына түбәндәге китаплар керә:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И.И.Зубарева, А.Г.Мордкович;

А.Г.Мордкович. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А.Г.Мордкович, Л.А.Александрова, Т.Н.Мишустина, Е.Е.Тульчинская. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А.Г.Мордкович. Алгебра. 7 класс. Методическое пособие для учителя;

Л.А.Александрова. Алгебра. 7 класс. Контрольные работы / Под ред. А.Г.Мордковича;

Л.А.Александрова. Алгебра. 7 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А.Г.Мордковича;

Е.Е.Тульчинская. Алгебра. 7 класс. Блицопрос;

В.В.Шеломовский. Электронное сопровождение курса «Алгебра-7» / Под ред. А.Г.Мордковича.

7 нче сыйныфта алгебра курсын өйрәнү өчен укучыларда ике китап: дәреслек һәм мәсьәләләр җыентыгы булырга тиеш. В.В.Шеломовский төзегән заманча мультимедиа чарасы (компьютер дискы) укучылар өчен дә, укытучылыр өчен дә яхшы ярдәмче булачак.

Сезнең кулыгызда әлеге комплектның беренче китабы** — дәреслек. Автор аны укытучылар да, укучылар да, ата-аналар да укырлар дип ышанып кала, чөнки ул һәркем аңларлык җиңел телдә, математиканың коры лексикасына хас булмаган үзгәрәк сөйләм элементларын да кулланып язылды. Шул ук вакытта фикер йөртүләрнең төп этаплары аерып алып, укучының игътибарын шунда юнәлтеп күрсәтелде. Мәсәлән, барлык текстлы мәсьәләләрнең дә диярлек чишелешләре өч этапка бүлеп бирелде: математик модель төзү; төзелгән модель буенча эш; мәсьәләнең соравына җавап.

Математика дәресләрендә укытучы гадәти сөйләм теле (аралашу теле, әдәби хикәяләү теле) белән фәнни — математикада кабул ителгән законнарга нигезләнгән коры, катгый, кыска һәм төгәл телне бергә кушып сөйли. Бу дәреслек тә нәкъ менә шулай, күбесенчә уку һәм аңлау өчен язылды.

Дәреслеккә таянып, укытучы нәрсәне укучыларга дәрестә сөйләргә, нәрсәне истә калдыру өчен, ә нәрсәне өйдә генә укып чыгу (бәлки, алдагы

---

* УМК турында тулырак мәгълүматны www.mnemozina.ru һәм www.ziimag.narod.ru сайтларыннан табарга мөмкин.

** Дәреслек һәм мәсьәләләр җыентыгы гына татар теленә тәрҗемә ителде (*ред.*).

дәрестә әңгәмә формасында гына аңлашу) өчен тәкъдим итәргә кирәген бик яхшы төшенәчәк.

Мөмкин булган һәр урында автор проблемалы укыту идеяләренә тугры калырга тырышты. Проблема (киңрәк мәгънәдә) — ул без бүген хәл итә алмаган һәм иртәгә дә хәл итә алмый торган әйбер; ул безне байтак вакытлар газаплый, акрынлап без аны чишүгә якынаябыз, хәтта моны сизәбез дә; һәм, ниһаять, аны тулысынча хәл итеп, без чын-чынлап рухи күтәренкелек тоябыз.

Дәреслек өстендә эшләгәндә, автор проблемалы укытуга нәкъ менә шулай (локаль түгел, ә глобаль) аңлап якын килде. Мисалларны күпләп китереп була, әмма игътибарлы укучы (һәм, билгеле инде, математика укытучысы) моны үзе күрәчәк һәм аңлаячак.

Бары тик иң гади төшенчәләр генә әзер килеш бирелә, калганнары исә акрынлап, төзәтмәләр һәм өстәмәләр белән кертелә, кайберләре, аларга төгәл билгеләмә бирү өчен иң уңайлы мизгел килеп җиткәнче, интуиция дәрәҗәсендә генә кабул ителә. Шундый төшенчәләрдән, мәсәлән, функцияне күрсәтергә мөмкин, авторның тирәнтен инануы буенча, аны башта ук кертергә кирәкми, ул «өлгереп җитәргә» тиеш. Һич югында, бу дәреслектә функциянең төгәл билгеләмәсе юк, ул алгебраның 9 нчы сыйныф курсында биреләчәк.

Дәреслек өстендә эшләгәндә, автор үзенең төп бурычы — математик фактларны санап чыгу түгел, ә укучыларны фән эчендә үстерү икәнлеген яхшы аңлап эш итте. Башка сүзләр белән әйткәндә, курста өстенлек мәгълүмат күплегенә түгел, ә аның үстерү сәләтенә бирелде. Дәреслектә үстерешле укытуның Л.В.Занков тарафыннан билгеләнгән барлык принциплары да гамәлдә: югары авырлык дәрәҗәсендә укыту; программа темаларын шактый кызу үтү; теоретик белемнәрнең әйдәп баручы роле; укыту процессын бәяләү (укучы материалны өйрәнү барышында үзенең акыллылана баруын күрергә тиеш); барлык укучыларны да үстерү (билгеле, аларның шәхси мөмкинлекләрен исәпкә алып).

Һәр бүлек «Төп нәтиҗәләр» дигән бүлекчә белән тәмамлана. Бу — үзенә күрә казанышлар күргәзмәсе, йомгак ясау, укучының үз-үзенә бәясе. Укыту процессын уңышлы итү өчен бу бик мөһим дип саныйбыз.

Автор

Китап белән эшләргә өйрәнегез

Дәреслекнең һәр битендә диярлек тамга-символлар бар. Бу символларны кертүнең максаты — укучыларга уку материалын үзләштерергә һәм ныгытырга ярдәм итүдән; укытучыларга — укучыларында өйрәнелә торган материал буйлап тиз ориентлашу күнекмәләре тәрбияләүдә, ата-аналарга балаларның белемнәрен дөрес контрольдә тотуда булышудан гыйбарәт.

Редакциядән

■ — мисал чишелешенең тәмамлануы («җавап» сүзе булмаган очрак)

1
БҮЛЕК

МАТЕМАТИКА ТЕЛЕ. МАТЕМАТИК МОДЕЛЬ

§ 1. *Санлы һәм алгебраик аңлатмалар*
§ 2. *Нәрсә ул математика теле*
§ 3. *Нәрсә ул математик модель*
§ 4. *Бер үзгәрешле сызыкча тигезләмә*
§ 5. *Координатлар турысы*

§ 1. САНЛЫ һӘМ АЛГЕБРАИК АҢЛАТМАЛАР

Кечерәк сыйныфларда сез бөтен һәм вакланмалы саннар белән эш итәргә өйрәндегез, тигезләмәләр чиштегез, геометрик фигуралар, координаталар турысы, координаталар яссылыгы белән таныштыгыз. Болар барысы да «Математика» дигән дәресләрдә өйрәнелде. Чынбарлыкта исә фәннең математика дигән гаять әһәмиятле өлкәсе үзе дә бик күп мөстәкыйль өлешләргә: алгебра, геометрия, ихтималлылык теориясе, математик анализ, математик логика, математик статистика, уеннар теориясе һәм башка фәннәргә бүленә. Һәр бүлекнең үз өйрәнү объектлары, чынбарлыкны танып белүдә үз алымнары бар.

Хәзер без алгебра фәнен өйрәнергә керешәбез. Ул кешегә төрле исәпләүләр ясау мөмкинлеге белән бергә бу исәпләүләрне тизрәк, уңайлырак юллар белән эшләргә өйрәтә. Алгебра алымнарын куллана белүче кешенең моны белмәүчегә караганда өстенлеге бар: ул тизрәк исәпли, тормыш хәлләрендә үзен җиңелрәк хис итә, карарларны төгәлрәк кабул итә, яхшырак фикерли. Безнең бурыч — сезгә алгебраик алымнарны үзләштерүдә ярдәм итү, сезнең бурыч — өйрәнүгә каршы тормау, кыенлыкларны җиңә-җиңә безнең белән бергә атлау.

Чынлыкта исә сез кечерәк сыйныфларда тылсымлы алгебра дөньясының тәрәзәсен инде ачкан идегез, чөнки алгебра беренче чиратта санлы һәм алгебраик аңлатмаларны өйрәнә.

санлы аңлатма

алгебраик аңлатма

Исегезгә төшерәбез, саннардан һәм арифметик гамәлләр тамгаларыннан төзелгән теләсә нинди язылыш **санлы аңлатма** дип атала (билгеле инде, ниндидер мәгънә салынганы, мәсәлән, $3 + 5 \cdot 7$ — санлы аңлатма, ә $3 + :$ — санлы аңлатма түгел, ә символларның мәгънәсез җыелмасы була). Кайбер сәбәпләр буенча (алары турында без алдарак сөйләшербез) еш кына конкрет саннар урынына хәрефләр (күбесенчә латин алфавитыннан) кулланыла, бу очракта **алгебраик аңлатма** килеп чыга. Бу аңлатмалар бик зур да булырга мөмкиннәр. Алгебра исә, төрле кагыйдәләр, законнар, үзлекләр, формулалар кулланып, аларны гадиләштерергә өйрәтә.

1 нче мисал. Санлы аңлатманың кыйммәтен табыгыз:

$$\frac{(2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right)}{25 \cdot 37 \cdot 0{,}4}.$$

Чишү. Хәзер без кайбер нәрсәләрне искә төшерербез, һәм сез үзегезнең шактый ук алгебраик фактлар белүегезне күрерсез.

Барыннан да элек исәпләүләрне ничек итеп эшләү планы булдырырга кирәк. Уңайлык өчен яңа билгеләүләр кертәбез. Бирелгән вакланмалы аңлатманың санаучысын — A, ә ваклаучысын B хәрефе белән билгеләрбез:

$$A = (2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right); \quad B = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4.$$

A аңлатмасында бүленүчене — C, ә бүлүчене D хәрефе белән билгелибез. Ул вакытта безнең эш планы мондыйрак булыр:

1) C аңлатмасының c кыйммәтен табабыз;
2) D аңлатмасының d кыйммәтен табабыз;
3) c ны d га бүлеп, A аңлатмасының a кыйммәтен табабыз;
4) B аңлатмасының b кыйммәтен табабыз;
5) a ны b га бүлеп, бирелгән санлы аңлатманың кыйммәтен табабыз.

Шулай итеп, исәпләү планы инде бар (ә бит план — эшнең яртысы!), хәзер аны гамәлгә ашырасы калды.

1) $C = 2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81$. Билгеле инде, «турыдан гына ярырга» да мөмкин: $2{,}73 + 4{,}81$, аннан чыккан санга $3{,}27$ не кушабыз, аннары $2{,}81$ не алабыз. Әмма культуралы кеше болай исәпләми. Ул кушуның урын алыштыру һәм оештыру законнарын исенә төшерә (хәер, аңа аларны искә төшерәсе дә юк, алар аның башында) һәм болай итеп исәпли:

$$(2{,}73 + 3{,}27) + (4{,}81 - 2{,}81) = 6 + 2 = 8.$$

Шулай итеп, $c = 8$.

2) $D = \frac{2}{5} - \frac{14}{15}$. Биредә безгә гади вакланмалар белән ничек эшлисен искә төшерергә кирәк. Башта вакланмаларны уртак ваклаучыга китерәләр. 5 һәм 15 саннарының иң кечкенә уртак кабатлысы 15 саны һәм ул уртак ваклаучы була да. $\frac{2}{5}$ вакланмасы өчен: $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot3}{5\cdot3} = \frac{6}{15}$. Аннан соң табабыз:

$$\frac{2}{5} - \frac{14}{15} = \frac{6}{15} - \frac{14}{15} = \frac{6-14}{15} = -\frac{8}{15}.$$

Димәк, $d = -\frac{8}{15}$.

3) c ны d га бүләбез:

$$8 : \left(-\frac{8}{15}\right) = 8\cdot\left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8\cdot15}{8} = -15.$$

Димәк, $a = -15$.

4) $B = 25\cdot37\cdot0{,}4$. Тагын «турыдан ярырга» мөмкин: ягъни $25\cdot37$ не исәпләргә, килеп чыккан санны $0{,}4$ кә тапкырларга. Әмма уйлый белгән кеше (ә культуралы кеше һәрчак уйлый), тапкырлауның урын алыштыру һәм оештыру законнарын файдаланып, болай исәпли:

$$25\cdot37\cdot0{,}4 = (25\cdot0{,}4)\cdot37 = 10\cdot37 = 370.$$

Димәк, $b = 370$.

5) a санаучысын b ваклаучысына бүләсе калды. Табабыз: $-\frac{15}{370} = -\frac{3}{74}$ (санаучыны да, ваклаучыны да 5 кә бүлдек, ягъни вакланманы кыскарттык).

Җавап: $-\frac{3}{74}$.

Ә хәзер бергәләп анализ ясыйк, мисалны чишү барышында безгә математикадан нинди белешмәләрне искә төшерергә (һәм кулланырга да!) туры килгән икән.

1. Арифметик гамәлләр тәртибе.
2. Кушуның урын алыштыру законы: $a + b = b + a$.
3. Тапкырлауның урын алыштыру законы: $ab = ba$.
4. Кушуның оештыру законы:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

5. Тапкырлауның оештыру законы: $abc = (ab)c = a(bc)$.
6. Гади вакланма, унарлы вакланма, тискәре сан төшенчәләре.
7. Унарлы вакланмалар белән арифметик гамәлләр.
8. Гади вакланмалар белән арифметик гамәлләр.
9. Гади вакланманың төп үзлеге: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да нульгә тигез булмаган бер үк санга тапкырлаудан яки бер үк санга бүлүдән вакланманың кыйммәте үзгәрми). Бу үзлек безгә $\frac{2}{5}$ вакланмасын $\frac{6}{15}$ рәвешкә китерергә мөмкинлек бирде ($\frac{2}{5}$ вакланмасының санаучысын һәм ваклаучысын бер үк 3 санына тапкырладык). Шул ук үзлекне кулланып, $\frac{15}{370}$ вакланмасын кыскарттык ($\frac{15}{370}$ вакланмасының санаучысын да, ваклаучысын да бер үк 5 санына бүлдек).
10. Уңай һәм тискәре саннар белән эшләү кагыйдәләре.

Сез боларның барысын да инде беләсез, әмма алар — алгебраик фактлар. Шулай итеп, сез инде кечерәк сыйныфларда алгебра белән бераз танышкансыз. Төп кыенлык, сез аны 1 нче мисалдан күрдегез инде, мондый фактларның шактый күп булуында. Һәм аларны белү генә түгел, «тиешле вакытта тиешле урында» куллана белү дә кирәк икән. Менә шуларны өйрәнербез дә инде.

санлы аңлатманың кыйммәте

үзгәрешле

алгебраик аңлатманың кыйммәте

Һәм соңгысы (1 нче мисал буенча). Санлы аңлатманы гадиләштергәннән соң килеп чыккан сан (безнең мисалда $-\frac{3}{74}$ булды) **санлы аңлатманың кыйммәте** дип атала.

Әгәр инде алгебраик аңлатма бирелгән икән, **алгебраик аңлатманың кыйммәте** турында сөйләргә мөмкин, тик бу аңа кергән хәрефләрнең конкрет кыйммәтләре өчен генә була. Мәсәлән, $a + b$ алгебраик аңлатмасы $a = 5$, $b = 7$ булганда 12 кыйммәтенә ия (чөнки $a + b = 5 + 7 = 12$); $a = -16$, $b = -14$ булганда -30 кыйммәтенә ия ($a + b = -16 + (-14) = -16 - 14 = -30$). $a^2 - 3b$ алгебраик аңлатмасы (хәтерлисезме a^2 нәрсә икәнен: ул $a \cdot a$) $a = -2$, $b = 0{,}4$ булганда $(-2)^2 - 3 \cdot 0{,}4$ рәвешле санлы аңлатмага әверелә, аны гадиләштереп табабыз: $4 - 1{,}2 = 2{,}8$. Ул $a^2 - 3b$ алгебраик аңлатмасының $a = -2$, $b = 0{,}4$ булгандагы кыйммәте 2,8 дигән сүз.

Алгебраик аңлатма составына кергән хәрефләргә төрле санлы кыйммәтләр биреп булганга күрә (ягъни хәрефләрнең кыйммәтләрен үзгәртеп була), бу хәрефләр **үзгәрешләр** дип атала.

2 нче мисал. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)}$ алгебраик аңлатмасының кыйммәтләрен а) $a = 1$, $b = 2$; б) $a = 3{,}7$, $b = -1{,}7$; в) $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ булганда табарга.

Чишү.

а) Гамәлләр тәртибен үти барып табабыз:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$;

2) $a + b = 1 + 2 = 3$;

3) $a - b = 1 - 2 = -1$;

4) $(a + b)(a - b) = 3 \cdot (-1) = -3$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{9}{-3} = -3$.

б) Нәкъ шулай, гамәлләр тәртибен үтәп, бер-бер артлы табабыз:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 3{,}7^2 + 2 \cdot 3{,}7 \cdot (-1{,}7) + (-1{,}7)^2 =$
$= 13{,}69 - 12{,}58 + 2{,}89 = 4;$

2) $a + b = 3{,}7 + (-1{,}7) = 2;$

3) $a - b = 3{,}7 - (-1{,}7) = 5{,}4;$

4) $(a + b)(a - b) = 2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8;$

5) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{4}{10{,}8} = \dfrac{4 \cdot 10}{10{,}8 \cdot 10} = \dfrac{40}{108} = \dfrac{10}{27}$

($\dfrac{40}{108}$ санаучыны һәм ваклаучыны 4 кә бүлдек, ягъни ваклананы кыскарттык).

в) Яңадан, гамәлләр тәртибен үтәп, бер-бер артлы исәплибез:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 =$
$= \dfrac{9}{25} + \dfrac{18}{25} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{36}{25};$

2) $a + b = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{5};$

3) $a - b = \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5} = 0;$

4) $(a + b)(a - b) = \dfrac{6}{5} \cdot 0 = 0.$

игътибар итегез

Ә нульгә бүләргә ярамый! Бу очракта (шуңа охшаш очракларда да!) бу ни дигән сүз соң? Ә бу $a = \dfrac{3}{5}$, $b = \dfrac{3}{5}$ булганда, бирелгән алгебраик аңлатманың *мәгънәсе юк* дигән сүз.

Шундый терминология кулланыла: хәрефләр (үзгәрешлеләр) конкрет кыйммәтләр алганда алгебраик аңлатманың санлы кыйммәте булса, үзгәрешләрнең күрсәтелгән кыйммәтләрен **мөмкин табылган** дип йөртәләр; әгәр инде хәрефләр (үзгәрешлеләр) конкрет кыйммәтләр алганда алгебраик аңлат-

сүзлекчә

үзгәрешлеләрнең мөмкин табылган кыйммәтләре

үзгәрешлеләрнең мөмкин булмаган кыйммәтләре

маның мәгънәсе булмаса, үзгәрешлеләрнең бу кыйммәтләре **мөмкин булмаган** кыйммәтләр була. Әйтик, 2 нче мисалда $a = 1$ һәм $b = 2$, $a = 3{,}7$ һәм $b = -1{,}7$ — мөмкин табылган кыйммәтләр, ә $a = \frac{3}{5}$ һәм $b = \frac{3}{5}$ — кыйммәтләре мөмкин табылмаганнар була (төгәлрәк әйтсәк, кыйммәтләренең беренче ике пары — мөмкин табылганнар, өченче пар — мөмкин табылмаган кыйммәтләр).

Гомумән, 2 нче мисалда a һәм b үзгәрешлеләренең $a + b = 0$, яисә $a - b = 0$ була торган кыйммәтләре мөмкин табылмаган кыйммәтләр була. Мәсәлән, $a = 7$, $b = -7$ яки $a = 28{,}3$, $b = 28{,}3$ — мөмкин кыйммәтләр түгел, чөнки беренче очракта $a + b = 0$, икенчесендә $a - b = 0$. Ике очракта да бу мисалның ваклаучысы нульгә әйләнә, һәм, кабатлап әйтәбез, нульгә бүләргә ярамый. Хәзер әлеге мисалның үзгәрешләре өчен үзегез дә мөмкин табылган яисә мөмкин булмаган кыйммәтләр парларын уйлап таба алырсыз. Уйлап карагыз!

1 нче искәрмә. 2в) мисалын чынлыкта без начар (культурасыз) чиштек, чөнки артык, кирәксез исәпләүләр ясарга туры килде. Башта ук $a = \frac{3}{5}$ һәм $b = \frac{3}{5}$ булганда ваклаучының нульгә әверелгәнен күрергә һәм аңлатманың мәгънәсе юк дип әйтергә мөмкин иде. Тик нәрсә кирәген белгән кеше генә шул әйберне күрә белә. Алгебра менә шуны өйрәтә дә.

2 нче искәрмә. Әгәр без 2 нче мисалны соңрак эшләсәк, күпкә уңайлырак итеп чишәр идек. Без аңлатманы $\frac{a + b}{a - b}$ рәвешенә китереп, гадиләштерә алыр идек, ә аннары исәпләү дә җиңеләер иде. Ә менә ни өчен $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$ икәнлеген без әле әйтә алмыйбыз. Бу сорауга без соңрак (§ 35) җавап табарбыз.

§ 2. НӘРСӘ УЛ МАТЕМАТИКА ТЕЛЕ

Математика телендә күп кенә расламалар гадәти телдәгегә караганда аңлаешлырак һәм кыскарак. Мәсәлән, гадәти телдә болай диләр: «Кушылучыларның урынын алыштырудан сумма үзгәрми». Моны ишеткән математик болай яза (яки әйтә):

$$a + b = b + a.$$

Ул әйтелгән расламаны математика теленә күчерә, ә бу телдә төрле саннар, хәрефләр (үзгәрешлеләр), арифметик гамәл тамгалары, башка символлар кулланыла. $a + b = b + a$ язылышы куллану өчен уңайлы һәм аңлаешлы да.

Икенче мисалны алыйк. Гадәти телдә әйтәләр: «Ваклаучылары бер үк булган гади вакланмаларны кушу өчен, аларның санаучыларын кушарга, ә ваклаучыны үзгәрешсез калдырырга кирәк». Математик үз теленә «синхрон» тәрҗемә ясый:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Ә менә кире тәрҗемәгә бер мисал. Математика телендә тарату законы язылган:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Гадәти телгә тәрҗемә итеп, озын бер җөмлә табабыз: «a санын b һәм c саннарының суммасына тапкырлау өчен, a санын бер-бер артлы һәр кушылучыга тапкырларга һәм килеп чыккан тапкырчыгышларны кушарга кирәк».

Һәр телдә язма һәм телдән сөйләм бар. Алдарак без математик телнең язма теле турында сөйләдек. Ә телдән сөйләм — ул махсус терминнар («кушылучы», «тигезләмә», «тигезсезлек», «график», «координата» һ.б.) куллану һәм сүзләр белән аңлатылган төрле математик расламалар дигән сүз.

Яңа телне үзләштерү өчен, аның хәрефләрен, иҗекләр, сүзләр, җөмләләр, кагыйдәләрен, грамматикасын өйрәнергә кирәк. Бу бик үк күңелле эш түгел, бер утыруда укый да, сөйли дә барсак, кызыклырак булыр иде. Тик алай була алмый, түземлелекне җыйнап, төп нигезләренә төшенергә кирәк. Шулай өйрәнгәндә генә сезнең математика теле турындагы күзаллауларыгыз акрынлап киңәя барыр.

§ 3. НӘРСӘ УЛ МАТЕМАТИК МОДЕЛЬ

Күз алдыгызга китереп карагыз әле: мәктәптә дүрт җиденче сыйныф бар ди. **7А** да — 15 кыз һәм 13 малай, **7Б** да — 12 кыз һәм 12 малай, в **7В** да — 9 кыз һәм 18 малай, **7Г** да 20 кыз һәм 10 малай укый. Әгәр һәр сыйныфта ничә бала укый дигән сорау куелса, безгә 4 тапкыр бер үк кушу гамәлен эшләргә кирәк булачак:

7А да $15 + 13 = 28$ укучы;

7Б да $12 + 12 = 24$ укучы;

7В да $9 + 18 = 27$ укучы;

7Г да $20 + 10 = 30$ укучы.

математик модель

Математика телен кулланып, бу дүрт төрле ситуацияне дә берләштерергә мөмкин: сыйныфта a кыз b малай укый, барлык укучылар саны $a + b$ була. Бирелгән реаль ситуациянең ***математик моделе*** әнә шундый. Аерым алганда, алгебра төрле реаль ситуацияләрне математика телендә математик модель рәвешендә сурәтләү белән шөгыльләнә, аннан соң исә реаль хәлләр белән түгел, ә менә шушы модельләр белән эш итә һәм бу вакытта үзендәге төрле кагыйдәләр, үзлекләр һәм законнарны куллана.

Түбәндәге таблицада төрле реаль хәлләр һәм аларның математик модельләре бирелә; биредә a — сыйныфтагы кызлар саны, b — шул ук сыйныфтагы малайлар саны.

№	Реаль ситуация	Математик модель
1	Сыйныфта кызлар һәм малайлар саны тигез (**7Б** да кебек)	$a = b$
2	Кызлар малайлардан 2 гә артык (**7А** да кебек)	$a - b = 2$ яки $a = b + 2$ яки $a - 2 = b$

Таблицаның дәвамы

№	Реаль ситуация	Математик модель
3	Кызлар малайлардан 9 га азрак (**7В** да кебек)	$b - a = 9$ яки $b = a + 9$ яки $a = b - 9$
4	Кызлар малайлардан 2 тапкыр күбрәк (**7Г** да кебек)	$a = 2b$ яки $b = \frac{a}{2}$
5	Кызлар малайлардан 2 тапкыр азрак (**7В** да кебек)	$a = \frac{b}{2}$ яки $b = 2a$
6	Әгәр сыйныфка тагын бер кыз һәм өч малай килсә, кызлар һәм малайлар саны тигез була (**7А** да кебек)	$a + 1 = b + 3$
7	Әгәр сыйныфтан өч кыз китсә, малайлар кызлардан 3 тапкыр арта (**7В** да кебек)	$b = 3(a - 3)$

Әлеге таблицаны төзегәндә, без реаль ситуацияләрдән аның математик моделенә таба юнәлдек. Шулай ук кире юнәлештә дә хәрәкәт итә белергә, ягъни бирелгән математик модель буенча реаль ситуацияне сүзләр белән аңлата белергә дә кирәк. Мәсәлән, $a - 5 = b + 5$ дигән математик модель (безнең таблицадагы кебек тамгаланыш булганда) нәрсәне аңлата? Бу модель сыйныфтан 5 кыз китсә һәм 5 малай килсә, сыйныфта малайлар һәм кызлар саны тигезләшә дигәнне аңлата (**7Г** сыйныфына туры килә).

Сездә, бәлки, шундый сорау тугандыр: реаль ситуациянең математик моделе, кыска язылышын исәпләмәгәндә, безгә нәрсә бирә соң? Бу сорауга җавап бирү өчен, түбәндәге мәсьәләне чишәбез.

1 нче мисал. Сыйныфта кызлар малайлардан икеләтә артыграк. Әгәр бу сыйныфтан өч кыз китсә һәм өч малай килсә, кызлар малайлардан 4 кә артыграк була. Бу сыйныфта ничә укучы укый?

Чишү. Сыйныфта малайлар саны x булсын, ул вакытта кызлар саны $2x$ булыр. Әгәр өч кыз китсә, $(2x - 3)$ кыз кала. Әгәр өч малай килсә, малайлар $(x + 3)$ була. Шарт буенча кызлар малайлардан 4 кә артык булып кала; математика телендә ул $(2x - 3) - (x + 3) = 4$ дип языла.

Бу тигезләмә — мәсьәләнең математик моделе. Тигезләмә чишүнең үзебез белгән кагыйдәләре буенча бер-бер артлы табабыз:

$2x - 3 - x - 3 = 4$ (җәяләрне ачтык);

$x - 6 = 4$ (тиңдәш кушылучыларны берләштердек);

$x = 6 + 4;$

$x = 10.$

Хәзер без мәсьәләнең соравына җавап бирә алабыз. Сыйныфта 10 малай, димәк, 20 кыз (исегездәме, шарт буенча алар 2 тапкыр артыграк) укый.

Җавап: сыйныфта барысы 30 укучы.

Сез сиздегез микән, чишү барышында фикерләүләр төгәл өч этапка бүленде. Әйдәгез бергәләп карап үтик.

Беренче этапта, x үзгәрешлесен кертеп һәм мәсьәлә текстын математика теленә күчереп, без $(2x - 3) - (x + 3) = 4$ тигезләмәсе рәвешендәге математик модель төзедек.

Икенче этапта, 5–6 нчы сыйныфлардагы математика курсыннан белгәннәребезне кулланып, бу тигезләмәне чиштек: $x = 10$. Бу этапта без кызлар турында да, малайлар турында да уйламадык, ә «саф» математика белән шөгыльләндек, бары тик математик модель белән генә эшләдек.

Өченче этапта, мәсьәләнең соравына җавап бирү өчен, табылган чишелешне кулландык. Бу этапта без тагын кызларга, малайларга, безгә кирәкле сыйныфка әйләнеп кайттык.

Йомгак ясыйбыз. Мәсьәләне чишү барышында төгәл өч этап аерып күрсәтелә.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Икенче этап. *Математик модель белән эшләү.*

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Гадәттә, математика реаль чынбарлыкта әнә шулай кулланыла. Әлеге мисалдан соң сорауны кабатлыйбыз: математик модельләр һәм алар белән эшли белү кирәкме? Кирәк! Билгеле инде, модель катлаулырак булган саен, аның белән эшләү өчен шулкадәр күбрәк фактлар, кагыйдәләр, үзлекләр кулланырга туры килә. Әлеге фактларны, кагыйдә һәм үзлекләрне өйрәнергә кирәк, һәм без мәктәптә алгебра фәнен уку барышында моның белән шөгыльләнербез.

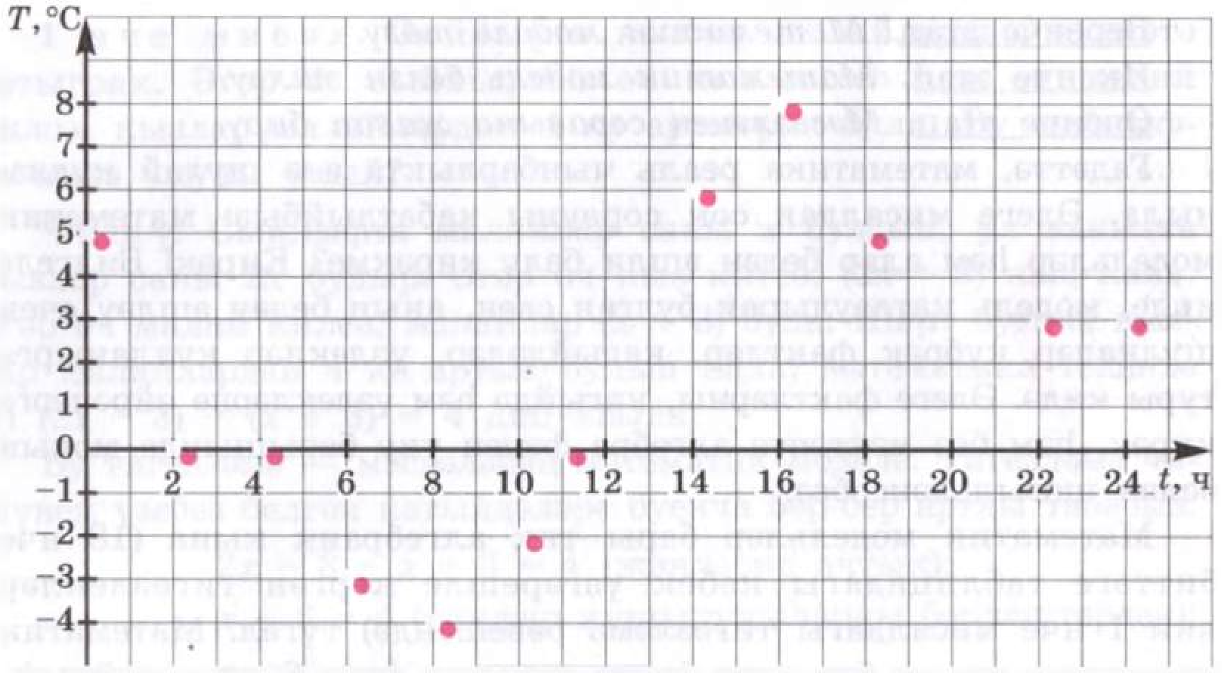
Математик модельләр бары тик алгебраик кына (18 нче биттәге таблицадагы кебек үзгәрешле кергән тигезлекләр яки 1 нче мисалдагы тигезләмә рәвешендә) түгел. Математик модельнең тагын бер төре белән танышу өчен 6 нчы сыйныфның математика курсыннан бер мәсьәләне карарбыз (сезгә моңарчы таныш булган мәсьәләне махсус алабыз).

2 нче мисал. Әгәр тәүлек буе һава температурасын үлчәп торсалар һәм үлчәү нәтиҗәләре буенча түбәндәге таблицаны төзесәләр, һава температурасы графигын төзергә:

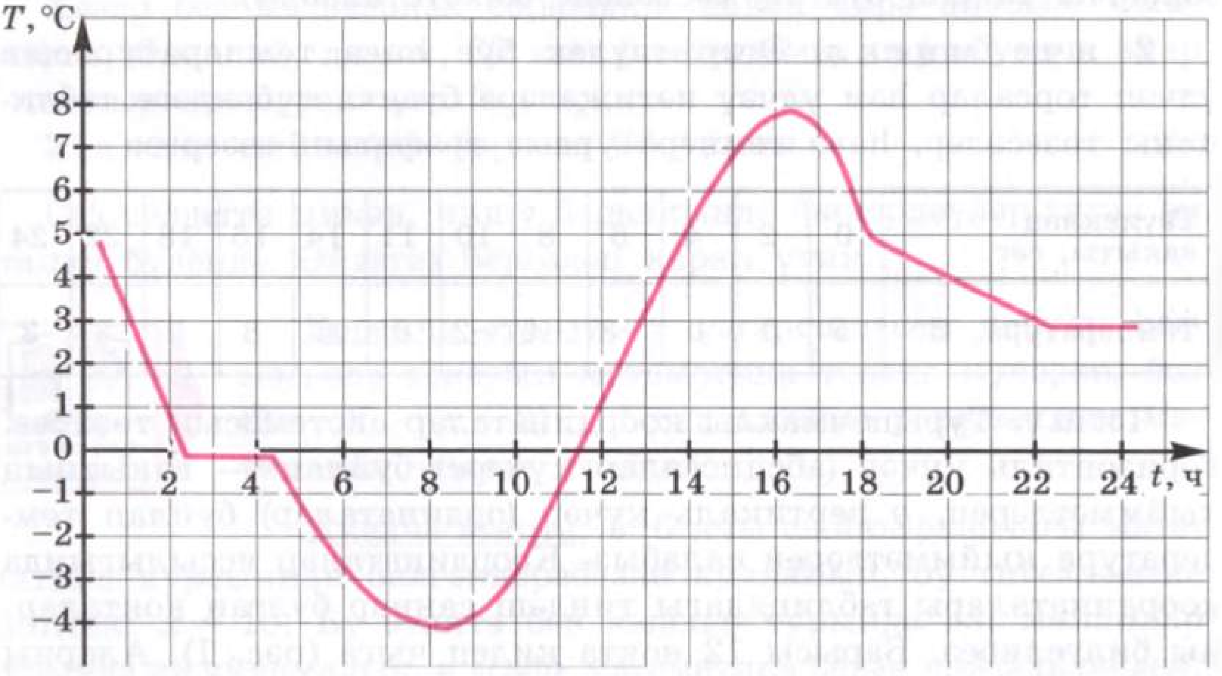
Тәүлекнең вакыты, сәг.	0	2	4	6	8	10	11	14	16	18	22	24
Температура, °C	5	0	0	−3	−4	−2	0	6	8	5	3	3

Чишү. Турыпочмаклы координаталар системасын төзибез. Горизонталь күчәр (абсциссалар күчәре) буйлап — вакытның кыйммәтләрен, ә вертикаль күчәр (ординаталар) буйлап температура кыйммәтләрен салабыз. Координаталар яссылыгында координаталары таблицадагы тиңдәш саннар булган нокталарны билгелибез. Барысы 12 нокта килеп чыга (рәс. 1). Аларны өзлексез сызык белән тоташтырып, температураның мөмкин саналган бер графигын табабыз (рәс. 2). ■

Төзелгән график температураның вакытка бәйлелеген сурәтләгән математик модель була. Бу графикны анализлаганда, тәүлек дәвамында һава температурасының ничек үзгәрүен сүзләр белән аңлатырга мөмкин. Төнлә 0 сәгатьтән иртәнге сигезгә кадәр салкыная бара (5° тан −4° ка кадәр). Аннан



Рәс. 1



Рәс. 2

соң, кояш чыккач, җылына башлаган күрәсең, сәгать 11 дә температура инде 0° ка кадәр күтәрелгән. 16 сәгатькә кадәр җылынган, әйтергә кирәк, 16 сәгатьтә иң җылы һава күзәтелгән (8°). Ә аннан караңгы төшә башлаган, температура да акрынлап түбәнәеп, 22 сәгатьтә 3° ка кадәр төшкән. Температура графигына карап, иң түбән температураның нинди булганын

(иртәнге 8 дә $-4°$), иң югарысының нинди булганын (16 сәгатьтә $8°$), температура кайчан кызурак, кайчан акрынрак үзгәргән, ә кайчан бөтенләй үзгәрмәгәнен (төнлә 2 дән 4 кә һәм кичен 22 дән 24 сәгатькә кадәр) якынча билгеләргә мөмкин. Карап үтелгән математик модель график модель үрнәге булып тора.

сүзлекчә

Шулай итеп, безгә реаль ситуацияләрне сүзләр ярдәмендә (*сүзле модель*), алгебраик (*алгебраик модель*) график юл белән (*график модель*) сурәтләүне өйрәнергә кирәк. Болардан тыш реаль ситуацияләрнең *геометрик модельләре* дә була — алар геометрия курсында өйрәнеләләр. Хәер, график модельләрне кайвакыт геометрик дип тә йөртәләр, ә «алгебраик модель» урынына «аналитик модель» терминын да кулланалар. Болар барысы да математик модельләрнең төрләре.

сүзле модель

алгебраик модель

график модель

Математик модельләрнең теләсә кайсы төрләре белән иркен эшли белер өчен, аларның берсеннән икенчесенә күчәргә өйрәнергә кирәк. Әйтик, алдарак 1 нче мисалда без сүзле модельдән аналитик модельгә күчтек. 2 нче мисалда сүзле (дөресрәге, таблицалы) модельдән график модельгә күчтек, шунлыктан бу ситуациянең сүзле, тагын да эчтәлекле тасвирламасына әйләнеп кайта алдык. Мондый күчешләрне өйрәнербез әле.

§ 4. БЕР ҮЗГӘРЕШЛЕЛЕ СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘ

Реаль ситуацияләрнең математик модельләре арасында иң гади һәм шул ук вакытта бик әһәмиятле төрләрнең берсе — *бер үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәләр.* Сез алар белән 5–6 нчы сыйныф математика курсыннан таныш инде. Сызыкча тигезләмәгә мисаллар китерик: $3x = 12$, $5y - 10 = 0$, $2a + 7 = 0$ һ.б. *Сызыкча тигезләмәләрне чишү* — үзгәрешленең тигезләмәне дөрес санлы тигезлеккә әверелдерә торган барлык кыйммәтләрен табу дигән сүз. Үзгәрешленең шундый һәр кыйммәтен **тигезләмәнең тамыры**

сүзлекчә

тигезләмәнең тамыры

сүзлекчә

бер үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә

коэффициент

дип атыйлар. Әйтик, $3x = 12$ тигезләмәсенең тамыры $x = 4$, чөнки $3 \cdot 4 = 12$ — дөрес тигезлек һәм шул ук вакытта башка тамырлар юк; $5y - 10 = 0$ тигезләмәсенең тамыры $y = 2$, чөнки $5 \cdot 2 - 10 = 0$ — дөрес тигезлек һәм башка тамырлар юк; $2a + 7 = 0$ тигезләмәсе $a = -3{,}5$, чөнки $2 \cdot (-3{,}5) + 7 = 0$ — дөрес тигезлек һәм башка тамырлар юк.

Гомумән, **бер x үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә** дип $ax + b = 0$ рәвешендәге тигезләмәне атыйлар, биредә a һәм b — теләсә нинди саннар (*коэффициентлар*). Әгәр $a = 0$ һәм $b = 0$, ягъни тигезләмә $0 \cdot x + 0 = 0$ рәвешендә булса, тигезләмәнең тамыры булып теләсә нинди сан тора ала (чиксез күп тамырлар). Әгәр $a = 0$ һәм $b \neq 0$, ягъни тигезләмә $0 \cdot x + b = 0$ рәвешендә икән, бер генә сан да бу тигезләмәне канәгатьләндерми; бу очракта тигезләмәнең тамырлары юк диләр.

Иң еш очрый торган $a \neq 0$ очрагын тикшерик. Болай фикер йөртәбез:

1) $ax + b = 0$, димәк, $ax = -b$ (чөнки $(-b) + b = 0$); чынлыкта b кушылучысын капма-каршы тамгасы белән тигезләмәнең сул ягыннан уң ягына чыгардык;

2) $ax = -b$, ягъни a һәм x саннары тапкырчыгышы $-b$ га тигез; ә бу вакытта x тапкырлаучысы $-b$ тапкырчыгышын икенче тапкырлаучыга бүлеп табылган өлешкә тигез. Димәк, $x = (-b) : a$. Бүлү тамгасы урынына вакланма сызыгын да кулланырга мөмкин: $x = -\frac{b}{a}$.

Чынлыкта без сызыкча тигезләмәне чишү өчен эш-гамәлләрнең билгеле бер программасын, адымнар тәртибен эшләдек — математикада мондый очракларда *алгоритм* термины кулланыла.

$ax + b = 0$ сызыкча тигезләмәсен ($a \neq 0$) чишү алгоритмы

1. Тигезләмәне $ax = -b$ рәвешенә китерергә.
2. Тигезләмәнең тамырын $x = (-b) : a$ яки $x = -\frac{b}{a}$ рәвешендә язарга.

Ә инде тигезләмә катлаулырак төрдә язылса нишләргә, мәсәлән:

$$2x - 2 = 10 - x?$$

Болай фикер йөртәбез. Ике аңлатма аларның аермалары нульгә тигез булганда һәм бары тик шул вакытта гына тигез булалар: $(2x - 2) - (10 - x) = 0$. 5–6 нчы сыйныф математика курсыннан билгеле булган җәяләрне ачу һәм охшаш буыннарны берләштерү кагыйдәләрен кулланабыз:

$$2x - 2 - 10 + x = 0;$$
$$3x - 12 = 0;$$
$$3x = 12;$$
$$x = 4.$$

Мондый тигезләмәләрне сез инде 5–6 нчы сыйныф математика курсында чишкән идегез. Фикерләүләрне, тагын бер файдалы алгоритм итеп гомумиләштерәбез.

$ax + b = cx + d$ тигезләмәсен $(a \neq c)$
чишү алымнары

1. Тигезләмәнең уң яктагы барлык буыннарын капма-каршы тамгалары белән сул якка чыгарырга.
2. Сул якта охшаш буыннарны берләштерергә, нәтиҗәдә $kx + m = 0$ (биредә $k \neq 0$) рәвешендәге тигезләмә табыла.
3. Тигезләмәне $kx = -m$ рәвешенә китерергә һәм аның тамырын язып куярга: = -—.

Алдагы параграфның 1 нче мисалында табылган тигезләмә нәкъ менә шулай чишелгән иде.

1 нче мисал. $\frac{2}{3} + \frac{7}{8} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Беренче ысул. Алгоритмнан файдаланабыз:

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{8} - \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y + \frac{9}{8} = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y = -\frac{9}{8};$$

$$\frac{1}{6}y = \frac{9}{8};$$

$$y = \frac{9}{8} : \frac{1}{6};$$

$$y = \frac{27}{4}, \text{ яки } y = 6\frac{3}{4}.$$

<u>Икенче ысул</u>. Алгоритмга керешкәнче, тигезләмәнең ике ягын да 24 кә — барлык вакланмаларның да иң кечкенә уртак ваклаучысына тапкырлыйбыз. Бу очракта $A = B$ булса, $24A = 24B$ һәм киресенчә булганнан чыгабыз. Табабыз:

$$24\left(\frac{2}{3}y + \frac{7}{8}\right) = 24\left(\frac{5}{6}y - \frac{1}{4}\right);$$

$$\left(24 \cdot \frac{2}{3}\right)y + 24 \cdot \frac{7}{8} = \left(24 \cdot \frac{5}{6}\right)y - 24 \cdot \frac{1}{4};$$

$$16y + 21 = 20y - 6.$$

Ә аннан соң алгоритмны файдаланабыз:

$$16y + 21 - 20y + 6 = 0;$$

$$-4y + 27 = 0;$$

$$4y = 27;$$

$$y = \frac{27}{4}, \text{ яки } y = 6\frac{3}{4}.$$

Җавап: $y = 6\frac{3}{4}$.

2 нче мисал. $\frac{3z - 4}{5} = \frac{2z + 1}{2}$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Пропорциянең төп үзлеген (пропорциянең кырый буыннары тапкырчыгышы урта буыннары тапкырчыгышына тигез була) кулланып табабыз:

$$2(3z - 4) = 5(2z + 1).$$

Моннан соңгы чишелешне аңлатып тормасак та була:

$$6z - 8 - 10z - 5 = 0;$$
$$-4z - 13 = 0;$$
$$-4z = 13;$$
$$z = -\frac{13}{4}, \text{ яки } z = -3\frac{1}{4}.$$

Җавап: $z = -3\frac{1}{4}$.

3 нче мисал. Берничә китап сатып алганнар һәм аларны китап шкафының берничә шүрлегенә урнаштырырга тырышканар. Башта һәр шүрлеккә 20 шәр китап куйганнар. Нәтиҗәдә ике шүрлек буш калган, ә калганнары 20 шәрдән тулган. Аннан соң шүрлекләргә 15 әр китап куярга булганнар. Бу очрак уңышлы чыккан: барлык шүрлекләр дә тулган (15 әрдән). Ничә китап сатып алганнар?

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Китап шкафында шүрлекләр санын x дип билгелик. Һәр шүрлеккә 20 шәр китап куйганда $(x - 2)$ шүрлек тулы булган. Димәк, сатып алынган китаплар саны $20(x - 2)$ формуласы белән белдерелә. Аннан соң, һәр шүрлеккә 15 әр китап куйганда, барлык x шүрлек тә тулы булган. Димәк, китаплар санының һәр ике аңлатмасын тигезлисе генә кала:

$$20(x - 2) = 15x.$$

Бу тигезләмә — мәсьәләнең математик моделе.

Икенче этап. *Төзелгән математик модель белән эшләү.*

Тигезләмәне чишәбез:

$$20(x - 2) - 15x = 0;$$
$$20x - 40 - 15x = 0;$$
$$5x - 40 = 0;$$
$$5x = 40;$$
$$x = 8.$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап бирү.*

Без китап шкафында 8 шүрлек булуын ачыкладык. Сатып алынган барлык китаплар бу шүрлекләргә 15 әрдән сыеп беткән. Димәк, барлыгы $15 \cdot 8 = 120$ китап сатып алынган.

Җавап: 120 китап сатып алынган.

§ 5. КООРДИНАТАЛАР ТУРЫСЫ

3 нче параграф ахырында без математик модельләрнең бер төреннән икенчесенә иркен күчә белүнең, уңайлырак модельне сайлауның кирәклеге турында сөйләдек. Бу уңайдан 5–6 нчы сыйныфлар математика курсыннан таныш булган график модельне — координаталар турысын искә төшерү файдалы булыр.

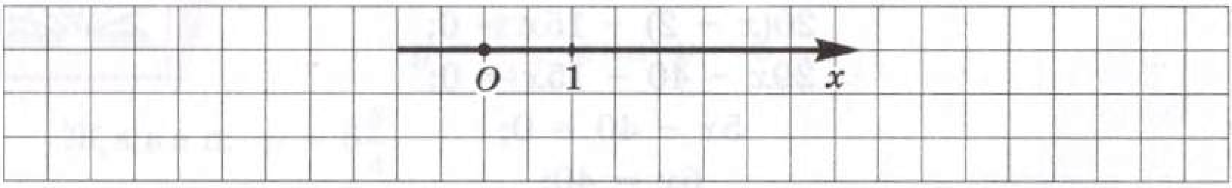
координаталар турысы

ноктаның координатасы

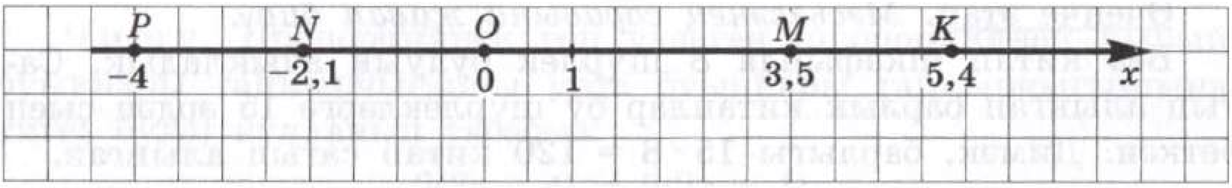
Башлангыч ноктасы O (исәп башлангычы), масштабы (берәмлек кисемтәсе, ягъни озынлыгы 1 гә тигез дип алынган кисемтә) һәм уңай юнәлеше билгеле булган l турысын **координаталар турысы** яки **координаталар күчәре** дип атыйлар (рәс. 3); шулай ук «x күчәре» («y күчәре», «z күчәре» һ.б.) атамасы да кулланыла.

Һәр санга координаталар турысының бердәнбер ноктасы туры килә. Мәсәлән, 3,5 санына M ноктасы (рәс. 4) туры килә, чөнки ул исәп башлангычыннан, ягъни O ноктасыннан 3,5 га тигез (бирелгән масштабта) ераклыкта урнашкан һәм O ноктасыннан бирелгән (уңай) юнәлештә салынган. -4 санына (рәс. 4) — O ноктасыннан 4 кә тигез булган ераклыкта һәм O ноктасыннан тискәре юнәлештә, ягъни бирелгән юнәлешнең капма-каршысы буйлап салынган P ноктасы туры килә.

Кире мәсьәләнең чишелеше турында да әйтергә мөмкин. Мәсәлән, O ноктасыннан уңай (бирелгән) юнәлештә 5,4 ераклыгында урнашкан K ноктасы 5,4 санына, ә O ноктасын-



Рәс. 3



Рәс. 4

нан тискәре юнәлештә 2,1 ераклыгында урнашкан N ноктасы −2,1 санына туры килә (рәс. 4).

Күрсәтелгән саннарны тиңдәш нокталарның **координаталары** дип атыйлар. Әйтик, 4 нче рәсемдәге K ноктасының координатасы — 5,4; P ноктасының координатасы −4; M ноктасының координатасы −3,5; N ноктасының координатасы −2,1; O ноктасының координатасы 0 (нуль) була. Образлырак итеп әйтсәк, координаталар турысы — күп кеше яши торган йорт, анда яшәүче кешеләр — нокталар, ә нокталарның координатлары — бу кешеләр яшәгән фатирларның номерлары.

сорау ?! җавап

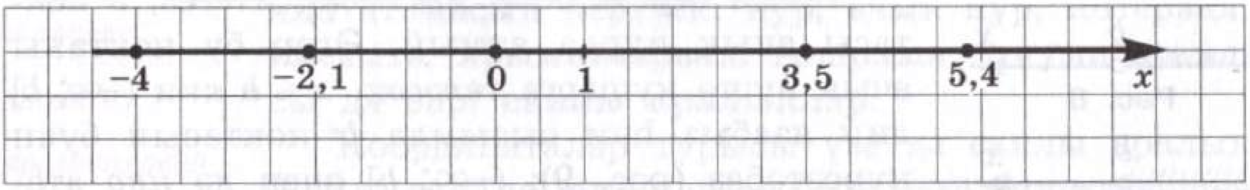
Координаталар турысы нәрсә өчен кирәк? Ни өчен ноктаны — сан, ә санны нокта белән билгеиләр? Моның берәр файдасы бармы соң? Әйе, бар.

Мәсәлән, координаталар турысында ике нокта: a координаталы A ноктасы һәм b координаталы B ноктасы бирелгән булсын (гадәттә, мондый очракларда $A(a)$, $B(b)$ дип кыскарак язалар). A һәм B нокталар арасындагы ρ ераклыгын табарга кирәк ди. Геометрик үлчәүләр үткәрү урынына әзер $\rho(A, B) = |a - b|$ формуласыннан файдалану да җитә икән (ρ — «ро» — грек алфавиты хәрефе; $\rho(A, B)$ урынына AB дип язарга мөмкин).

Шулай итеп, 4 нче рәсемдә:

$$KM = |5{,}4 - 3{,}5| = |1{,}9| = 1{,}9;$$
$$PM = |-4 - 3{,}5| = |-7{,}5| = 7{,}5;$$
$$PN = |-4 - (-2{,}1)| = |-4 + 2{,}1| = |-1{,}9| = 1{,}9.$$

Фикер йөртүләр барышында, кыскалыкка, төгәллеккә ирешү өчен, математиклар «координаталар турысында координатасы a булган A ноктасы» дигән озын җөмлә урынына кыска гына итеп «a ноктасы» дияргә һәм сызымда бу ноктаны аның координатасы белән күрсәтергә килешкәннәр. 5 нче рәсемдә −4; −2,1; 0; 1; 3,5; 5,4 нокталары билгеләнгән координаталар турысы сурәтләнгән.



Рәс. 5

Координаталар турысы безгә алгебра теленнән геометрия теленә һәм, киресенчә, иркен күчү мөмкинлеге бирә. Әйтик, a саны b санынннан кечерәк булсын. Алгебра телендә моны $a < b$ дип язалар; геометрия телендә исә a ноктасы координаталар турысында b ноктасыннан сулдарак урнашкан дигәнне аңлата. Тагын бер тапкыр кабатлыйбыз: алгебра теле дә, геометрия теле дә — без сезнең белән өйрәнә торган математика теленең бүлекләре.

Математика теленең координаталар турысы белән бәйләнгән тагын берничә элементы белән танышып үтик.

1. Әйтик, координаталар турысында a ноктасы билгеләнгән ди. Турыда a ноктасыннан уңдарак урнашкан барлык нокталарны карыйк һәм координаталар турысының аларга тиңдәш ягын штрих белән билгеләрбез (рәс. 6). Бу нокталар (саннар) күплеген **ачык нур** дип атыйлар һәм $(a; +\infty)$ дип билгелиләр, биредә $+\infty$ тамгасы «плюс чиксезлек» дип укыла; күплек $x > a$ тигезсезлеге (x нурының теләсә кайсы ноктасын аңлата) белән характерлана.

Игътибар итегез: a ноктасы ачык нурда ятмый. Әгәр инде бу ноктаны ачык нурга өстәргә кирәк булса, $x \geqslant a$ яки $[a; +\infty)$ дип язалар (a алдына түгәрәк җәя түгел, квадрат җәя куялар), ә сызымда мондый ноктаны 6 нчы рәсемдәге кебек буялмаган түгәрәк белән түгел, буялган түгәрәк белән билгелиләр (рәс. 7). Ә инде $(a; +\infty)$ нокталар күплеген ачык нур дип атасалар, $[a; +\infty)$ өчен **нур** атамасын кулланалар («ачык» сүзе кирәкми).

2. Координаталар турысында b ноктасы билгеләнгән булсын. Турыда b ноктасыннан сулдарак урнашкан барлык нокталарны карыйбыз һәм координаталар турысының тиңдәшле өлешен штрихлыйбыз (рәс. 8). Бу нокталар (саннар) күплеген дә *ачык нур* дип атыйлар һәм $(-\infty; b)$ дип билгелиләр, биредә $-\infty$ тамгасы «минус чиксезлек» дип укыла.

Тагын бер тапкыр игътибар итегез, b ноктасы ачык нурда ятмый. Әгәр бу ноктаны ачык нурга кушарга теләсәк, $x \leqslant b$ яки $(-\infty; b]$ дип язабыз һәм сызымда b ноктасын буяп күрсәтәбез (рәс. 9); $(-\infty; b]$ өчен дә *нур* атамасын кулланабыз.

Рәс. 6

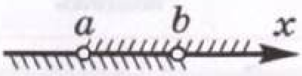
Рәс. 7

Рәс. 8

Рәс. 9

3. Координаталар турысында a һәм b нокталары билгеләнгән һәм $a < b$ булсын ди (ягъни a ноктасы турыда b дан сулдарак урнашкан). Хәзер a ноктасыннан уңдарак, әмма b ноктасыннан сулдарак яткан барлык нокталарны карыйбыз; координаталар турысының әлеге өлешен штрихлыйбыз (рәс. 10). Бу нокталар (саннар) күплеген **интервал** дип атыйлар һәм $(a;\ b)$ дип билгелиләр. Ул катгый икеле тигезсезлек $a < x < b$ белән тамгалана (биредә x — интервалның теләсә кайсы ноктасы).

Рәс. 10



Рәс. 11

Рәс. 12

Рәс. 13

Рәс. 14

Рәс. 15

Игътибар итегез: $(a;\ b)$ интервалы — ул $(-\infty;\ b)$ һәм $(a;\ +\infty)$ ачык нурларының *киселеше* (уртак өлеше). Моны 11 нче рәсемдә ачык күрәбез.

Әгәр $(a;\ b)$ интервалына аның очларын, ягъни a һәм b нокталарын өстәсәк, $[a;\ b]$ **кисемтәсе** килеп чыга (рәс. 12), ул $a \leqslant x \leqslant b$ катгый булмаган икеле тигезләмәсе белән тамгалана. Игътибарлы булыгыз, кисемтәне билгеләгәндә, интервал билгеләнешендәге кебек түгәрәк җәяләр түгел, ә квадрат җәяләр кулланыла; сызымда a һәм b нокталары интервалдагы кебек ачык төстәге түгәрәкләр белән түгел, караңгы түгәрәкләр белән билгеләнә.

$[a;\ b]$ кисемтәсе $(-\infty;\ b]$ һәм $[a;\ +\infty)$ нурларының киселеше (уртак өлеше) — бу 13 нче рәсемдә ачык күренә.

нур

ачык нур

интервал

кисемтә

ярыминтервал

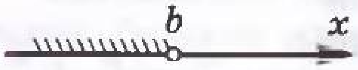
санлы аралык

Әгәр $(a;\ b)$ интервалына аның бер генә очын — a ноктасын гына (рәс. 14) яки b ноктасын гына (рәс. 15) кушсак нәрсә килеп чыгар икән? **Ярыминтервал** килеп чыга, беренче очракта аны $[a;\ b)$ дип, икенче очракта $(a;\ b]$ дип билгелиләр һәм ул беренче очракта $a \leqslant x < b$, икенчесендә $a < x \leqslant b$ икеле тигезсезлекләре белән тамгалана.

Шулай итеп, без математика теленең биш яңа атамасын керттек: нур, ачык нур, интервал, кисемтә, ярыминтервал. Аларның гомуми атамасы да бар: **санлы аралыклар**.

Координаталар турысы үзе дә санлы аралык булып санала; аңа карата $(-\infty;\ +\infty)$ билгеләнешен кулланалар.

Санлы аралыкларның гомуми таблицасы

Геометрик модель	Билгеләнеше	Санлы аралыкның исеме	Аналитик модель
	$(a;\ +\infty)$	ачык нур	$x > a$
	$[a;\ +\infty)$	нур	$x \geqslant a$
	$(-\infty;\ b)$	ачык нур	$x < b$
	$(-\infty;\ b]$	нур	$x \leqslant b$
	$(a;\ b)$	интервал	$a < x < b$
	$[a;\ b]$	кисемтә	$a \leqslant x \leqslant b$
	$[a;\ b)$	ярыминтервал	$a \leqslant x < b$
	$(a;\ b]$	ярыминтервал	$a < x \leqslant b$

2 БҮЛЕК

СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯ

§ 6. *Координаталар яссылыгы*
§ 7. *Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә һәм аның графигы*
§ 8. *Сызыкча функция һәм аның графигы*
§ 9. *y = kx сызыкча функциясе*
§10. *Сызыкча функцияләр графикларының үзара урнашуы*

§ 6. КООРДИНАТАЛАР ЯССЫЛЫГЫ

Координаталар турысында нокталар — бу «урамда яшәүчеләр» теркәлгән, һәр ноктаның үзенең «йорт номеры» — аның координатасы бар. Әгәр инде нокта яссылыкта дип бирелсә, аны «теркәү» өчен «йорт номерын» гына түгел, «фатир номерын» да күрсәтергә кирәк. Моның ничек эшләнгәнен искә төшерик.

Ике координата турысын үзара перпендикуляр итеп үткәрәбез һәм ике турының да исәп башлангычы итеп аларның кисешү ноктасын (*O*) билгелибез. Шуның белән яссылыкта **турыпочмаклы координаталар системасы** бирелә (рәс. 16), ул гадәти яссылыкны **координаталар яссылыгына** әйләндерә. *O* ноктасын **координаталар башлангычы** дип, координаталар турыларын (*x* күчәре һәм *y* күчәре) — **координата күчәрләре**, ә координата күчәрләре белән ясалган турыпочмакларны **координата почмаклары** дип атыйлар. Координата почмакларын 16 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә нумерлыйлар.

турыпочмаклы координаталар системасы

координаталар яссылыгы

координаталар башлангычы

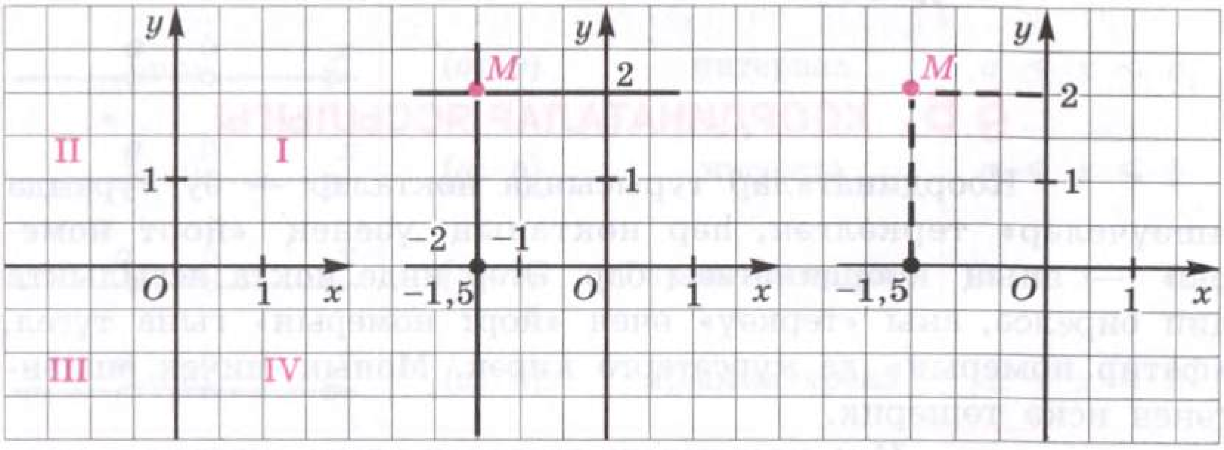
координата почмаклары

Ә хәзер 17 нче рәсемне карыйк. Анда турыпочмаклы координаталар системасы сурәтләнгән һәм *M* ноктасы билгеләнгән. *M* ноктасы аша *y* күчәренә параллель итеп туры үткәрәбез. Бу туры *x* күчәрен

сүзлекчә

абсцисса
ордината

ниндидер ноктада кисеп уза, бу ноктаның x күчәрендә координатасы бар (17 нче рәсемдәге нокта өчен бу координата — 1,5 кә тигез) һәм аны M **ноктасының абсциссасы** дип атыйлар. Хәзер M ноктасы аша x күчәренә параллель итеп туры уздырабыз. Туры y күчәрен ниндидер ноктада кисеп уза, бу ноктаның y күчәрендә координатасы бар (17 нче рәсемдәге нокта өчен бу координата 2 гә тигез) һәм ул ***M ноктасының ординатасы*** дип атала. Кыскача болай дип язалар: $M(x; y)$ (17 нче рәсемдәге нокта өчен $M(-1{,}5; 2)$). Абсциссны — беренче, ә ординатаны икенче урында язалар. Әгәр кирәк булса, башка төрле язылышны да кулланалар: $x = -1{,}5$; $y = 2$.



Рәс. 16 Рәс. 17 Рәс. 18

1 нче искәрмә. Гадәттә, M ноктасының координаталарын табу өчен, координата күчәрләренә параллель итеп M ноктасы аша турылар түгел, бу турыларның M ноктасыннан алып координаталар күчәрләренә кадәрге кисемтәләрен төзиләр (рәс. 18).

2 нче искәрмә. Үткән параграфта без санлы аралыкларның төрле билгеләнешләрен керткән идек. Аерым алганда, (3; 5) язылышы белән координаталар турысында очлары 3 һәм 5 нокталарында булган интервалны билгеләргә килешкән идек. Ә бу параграфта исә саннар парын без ноктаның координаталары дип кабул иттек; мәсәлән, (3; 5) — координаталар яссылыгында абсциссасы 3 һәм ординатасы 5 булган нокта. Символик язылышта кайсысы турында сүз барганын (интервалмы, әллә ноктаның координаталарымы?) ничек дөрес билгеләргә соң? Гадәттә, моны контекст буенча ачык аңлап була.

абсцисса күчәре

ордината күчәре

Алда әйтелгән атамалардан файдаланып, горизонталь координата турысын — **абсциссалар күчәре** яки **x күчәре** дип, ә вертикаль координата күчәрен **ординаталар күчәре** яки **y күчәре** дип атыйлар. Яссылыкта турыпочмаклы координаталар системасын бирү өчен x һәм y билгеләмәләрен кулланалар (16 нчы рәсемне кара) һәм еш кына xOy координаталар системасы бирелгән диләр. Шулай ук башка төрле билгеләнешләр дә очрый, мәсәлән, 19 нчы рәсемдә tOs координаталар системасы бирелгән.

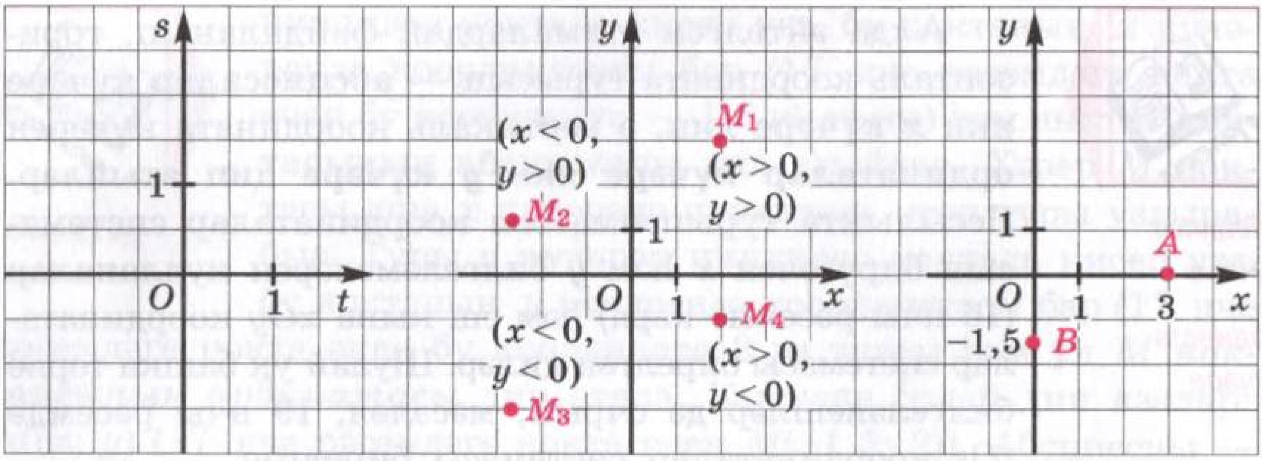
xOy координаталар системасында бирелгән M ноктасының координаталарын табу алгоритмы

1. M ноктасы аша y күчәренә параллель туры уздырырга һәм бу туры белән x күчәренең кисешү ноктасын табарга — бу M ноктасының абсциссасы була.
2. M ноктасы аша x күчәренә параллель туры уздырырга һәм бу туры белән y күчәренең кисешү ноктасын табарга — бу M ноктасының ординатасы була.

17 нче рәсемдә M ноктасының координаталарын табу өчен без нәкъ менә шулай эшләдек.

Әгәр $M_1(x;\ y)$ ноктасы беренче координата почмагында ятса, $x > 0$ һәм $y > 0$; әгәр $M_2(x;\ y)$ икенче координата почмагында ятса, $x < 0$, $y > 0$; әгәр $M_3(x;\ y)$ өченче координата почмагында ятса, $x < 0$, $y < 0$; әгәр $M_4(x;\ y)$ дүртенче координата почмагында ятса, $x > 0$, $y < 0$ була (рәс. 20).

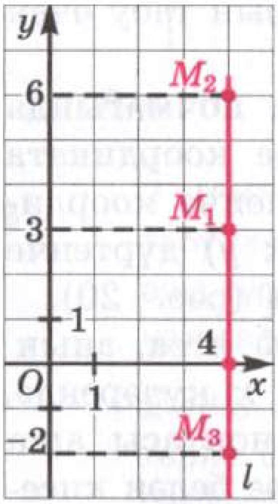
Әгәр нокта координата күчәрләренең берсендә ятса, аның координаталары нинди булыр? Әйтик, A ноктасы x күчәрендә, ә B ноктасы y күчәрендә ята ди (рәс. 21). A ноктасы аша y күчәренә параллель туры үткәреп, аның x күчәре белән кисешү ноктасын табуның мәгънәсе юк, чөнки мондый кисешү ноктасы инде бар — бу A ноктасы, аның координатасы (абсциссасы) 3 кә тигез. Шулай ук A ноктасы аша x күчәренә параллель туры үткәрү дә кирәкми: x күчәре үзе y күчәрен координатасы (ординатасы) 0 булган O ноктасында кисеп уза. Нәтиҗәдә A ноктасы өчен $A(3;\ 0)$ икәнен табабыз. Нәкъ шулай фикерләп $B(0;\ -1{,}5)$ ны билгелибез. Ә O ноктасы өчен $O\ (0;\ 0)$.



Рәс. 19 Рәс. 20 Рәс. 21

Гомумән, x күчәрендәге теләсә кайсы нокта (0; y) ә y күчәрендәге теләсә кайсы нокта (0; y) координаталарына ия.

Шулай итеп, координаталар яссылыгында ятучы ноктаның координаталарын ничек табарга кирәклеген тикшердек. Ә кире мәсьәләне, координаталары бирелгәндә ноктаны табу мәсьәләсен ничек чишәргә? Алгоритмын төзү өчен, ике ярдәмче, әмма шул ук вакытта бик мөһим фикерләүне карап үтик.



Рәс. 22

Беренче фикерләү. xOy координаталар системасында y күчәренә параллель һәм x күчәрен 4 координаталы (абсциссалы) ноктада кисеп узучы l турысы үткәрелгән булсын (рәс. 22). Бу туры өстендә ятучы теләсә кайсы ноктаның абсциссасы 4 була. Мәсәлән, M_1, M_2, M_3 нокталары өчен $M_1(4;\ 3)$, $M_2(4;\ 6)$, $M_3(4;\ -2)$. Башкача әйтсәк, l турысындагы теләсә нинди M ноктасының абсциссы $x = 4$ шартын канәгатьләндерә. Әгәр бу туры өстендә ятмый торган ноктаны алсак, аның абсциссасы 4 кә тигез булмый. Бу очракта $x = 4$ — *l турысының тигезләмәсе* яки *l турысы* (һәм бары ул гына) $x = 4$ *тигезләмәсен канәгатьләндерә*, диләр.

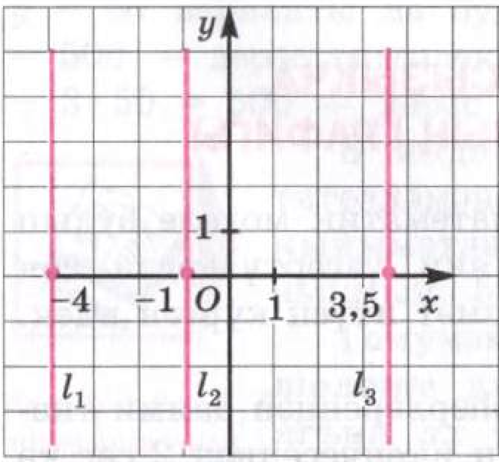
23 нче рәсемдә $x = -4$ (l_1 турысы), $x = -1$ (l_2 турысы), $x = 3{,}5$ (l_3 турысы) тигезләмәләрен канәгатьләндерүче турылар сурәтләнгән. Ә $x = 0$ тигезләмәсен нинди туры канәгатьләндерә? Уйлап таптыгызмы? y күчәре.

Икенче фикерләү. Әйтик, xOy координаталар системасында x күчәренә параллель һәм y күчәрен 3 координаталы (ординаталы) ноктада кисеп үтүче l турысы бирелгән ди (рәс. 24). Бу туры өстендә ятучы теләсә кайсы ноктаның ординатасы 3 була. Мәсәлән, M_1, M_2, M_3 нокталары $M_1(0;\ 3)$, $M_2(4;\ 3)$, $M_3(-2;\ 3)$. Башкача әйткәндә, l турысындагы теләсә кайсы ноктаның ординатасы $y = 3$ шартын канәгатьләндерә. Әгәр бу туры өстендә ятмаучы ноктаны карасак, аның ординатасы 3 кә тигез булмас. Бу очракта $y = 3$ — *l турысының тигезләмәсе* яки *l турысы* (һәм ул гына) *$y = 3$ тигезләмәсен канәгатьләндерә,* диләр.

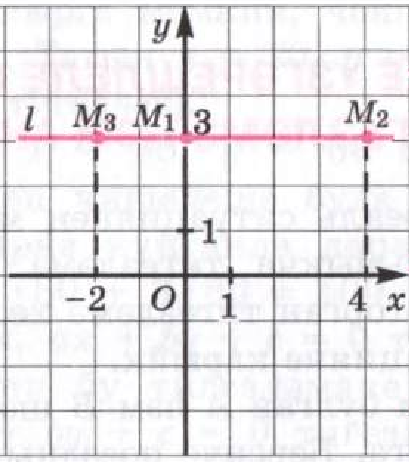
25 нче рәсемдә $y = -4$ (l_1 турысы), $y = -1$ (l_2 *турысы*), $y = 3{,}5$ (l_3 турысы) тигезләмәләрен канәгатьләндерүче турылар сурәтләнгән. Ә $y = 0$ тигезләмәсен нинди туры канәгатьләндерә? Уйлап таптыгызмы? x күчәре.

Математиклар кыскалык өчен «$x = 4$ тигезләмәсен канәгатьләндерүче туры» диясе урынга «$x = 4$ турысы» гына диләр. Шулай ук «$y = 3$ тигезләмәсен канәгатьләндерүче туры» урынына «$y = 3$ турысы» диләр. Без дә нәкъ шулай атарбыз.

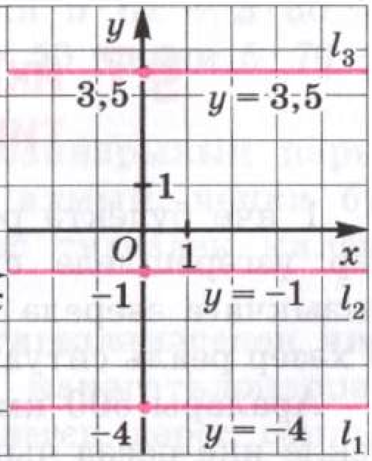
Хәзер 17 нче рәсемгә әйләнеп кайтыйк. Игътибар итегез: анда сурәтләнгән $M(-1{,}5;\ 2)$, ноктасы — $x = -1{,}5$ һәм $y = 2$ турыларының кисешү ноктасы ул. Хәзер ноктаны бирелгән координаталары буенча төзү алгоритмы аңлашыла төшәр.



Рәс. 23



Рәс. 24



Рәс. 25

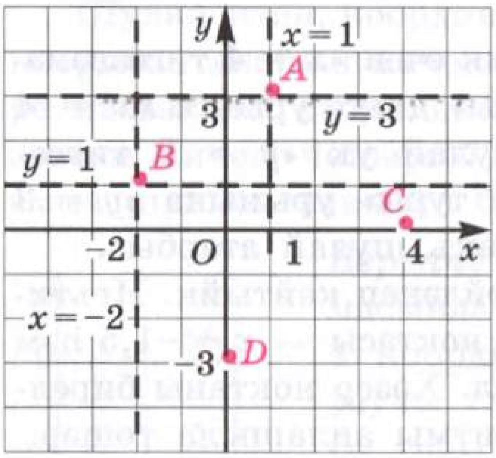
xOy турыпочмаклы координаталар системасында $M(a;\ b)$ ноктасын төзү алгоритмы

1. $x = a$ турысын төзергә.
2. $y = b$ турысын төзергә.
3. Төзелгән турыларның кисешү ноктасын табарга — бу $M(a;\ b)$ ноктасы була да инде.

Мисал. xOy координаталар системасында $A(1;\ 3)$, $B(-2;\ 1)$, $C(4;\ 0)$, $D(0;\ -3)$ нокталарын төзергә.

Чишү. A ноктасы $x = 1$ һәм $y = 3$ турыларының кисешү ноктасы була (рәс. 26).

B ноктасы $x = -2$ һәм $y = 1$ турыларының кисешү ноктасы була (рәс. 26). C ноктасы — x күчәрендә, ә D ноктасы y күчәрендә ята (рәс. 26).



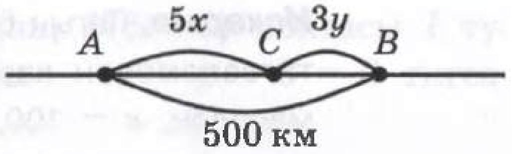
Рәс. 26

Беренче тапкыр турыпочмаклы координаталар системасын француз философы Рене Декарт (1596–1650) геометрик мәсьәләләрне алгебраик алымнар белән чишү һәм, киресенчә, алгебраик модельләрне геометриклары белән алыштыру өчен актив куллана башлый. Шуңа күрә кайвакыт «Декарт координаталар системасы», «Декарт координаталары» дип тә әйтәләр.

§ 7. ИКЕ ҮЗГӘРЕШЛЕЛЕ СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘ ҺӘМ АНЫҢ ГРАФИГЫ

1 нче бүлектә реаль ситуациянең математик моделе булып бер үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә яки үзгәртүләрдән соң сызыкчага әверелә торган тигезләмә хезмәт итүен күргән идек. Ә хәзер реаль ситуацияне карыйк.

Аралары 500 км булган A һәм B шәһәрләреннән даими тизлекле ике поезд чыга. Беренче поездның икенчесеннән 2 сәг кә алдарак чыгуы билгеле. Икенче поезд чыгып 3 сәг үткәннән соң, алар очрашалар. Поездларның тизлекләре нинди?



Рәс. 27

Мәсьәләнең математик моделен төзик. Беренче поездның тизлеге x км/сәг, икенчесенең y км/сәг булсын. Беренчесе 5 сәг юлда була һәм $5x$ км юл үтә. Икенчесе юлда 3 сәг була һәм $3y$ км юл үтә. Алар C ноктасында очрашалар, 27 нче рәсемдә ситуациянең геометрик моделе бирелгән. Алгебраик телдә ул болай языла:

$$5x + 3y = 500$$

яки

$$5x + 3y - 500 = 0.$$

Мондый математик модельне ике, x һәм y үгәрешлеле сызыкча тигезләмә дип атыйлар.

Гомумән, $ax + by + c = 0$ — **x һәм y ике үзгәрешлеле** (яки x һәм y ике билгесезле) **сызыкча тигезләмә**, биредә a, b, c — саннар (коэффициентлар).

сүзлекчә: ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә

$5x + 3y = 500$ тигезләмәсенә әйләнеп кайтыйк. Әгәр $x = 40$, $y = 100$ булса, $5 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 500$ — дөрес тигезлек килеп чыгуын күрәбез. Димәк, мәсьәләнең җавабы болай булырга мөмкин: беренче поездның тизлеге 40 км/сәг, икенчесенең тизлеге 100 км/сәг. $x = 40$, $y = 100$ саннарының парын $5x + 3y = 500$ *тигезләмәсенең чишелеше* дип атыйлар. Шулай ук кыйммәтләр пары (40; 100) $5x + 3y = 500$ *тигезләмәсен канәгатьләндерә* дип тә әйтәләр.

Табылган чишелеш бердәнбер түгел. Чынлап та, $x = 64$, $y = 60$ варианты да булырга мөмкин, чөнки $5 \cdot 64 + 3 \cdot 60 = 500$ — дөрес тигезлек. Тагын $x = 70$, $y = 50$ (чөнки $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ — дөрес тигезлек).

сүзлекчә: $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең чишелеше

Ә инде $x = 80$, $y = 60$ саннарының пары тигезләмәнең чишелеше була алмый, чөнки бу кыйммәтләрне куйганда дөрес тигезлек килеп чыкмый: $5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \neq 500$.

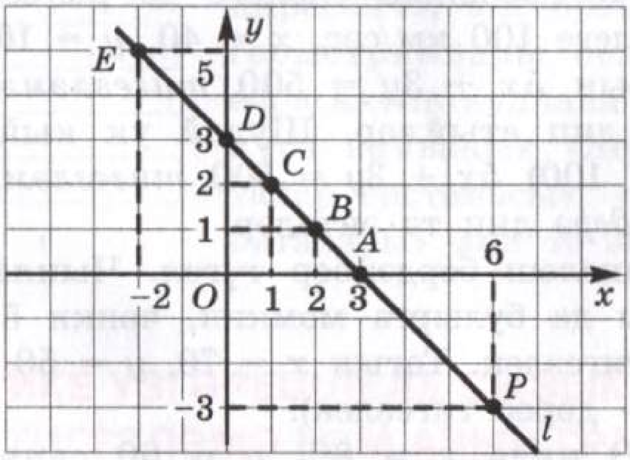
Гомумән, **$ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең чишелеше** дип бу тигезләмәне канәгатьләндерә, ягъни $ax + by + c = 0$ тигезлеген дөрес санлы тигезлеккә әверелдерә торган барлык саннар парларын $(x; y)$ атыйлар.

Искәрмә. Тагын бер тапкыр мәсьәләгә караган $5x + 3y = 500$ тигезләмәсен карыйк. Чиксез күп чишелешләр арасында, мәсәлән, $x = 100$, $y = 0$ (чынлап та, $5 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 500$ — дөрес санлы тигезлек); $x = 118$, $y = -30$ (чөнки $5 \cdot 118 + 3 \cdot (-30) = 500$ — дөрес санлы тигезлек) бар. Әмма бу парлар тигезләмәнең чишелешләре булсалар да, бирелгән мәсьәләнең чишелешләре була алмыйлар, чөнки поездның тизлеге нульгә тигез була алмый (ул чагында поезд тукталып торырга тиеш), ә инде тискәре сан булуы бөтенләй мөмкин түгел.

1 нче мисал. Ике үзгәрешлеле $x + y - 3 = 0$ сызыкча тигезләмәсенең чишелешләрен xOy координаталар яссылыгының нокталары рәвешендә сурәтләргә.

Чишү. Бирелгән тигезләмәнең берничә чишелешен, ягъни тигезләмәне канәгатьләндерә торган берничә саннар парын сайлый алабыз: (3; 0), (2; 1), (1; 2) (0; 3), (–2; 5).

Координаталар яссылыгында (xOy) $A(3; 0)$, $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 3)$, $E(-2; 5)$ нокталарын төзибез (рәс. 28). Игътибар итегез: барлык биш нокта да бер үк l турысында ята, аны үткәрәбез.



Рәс. 28

Бу очракта l турысы $x + y - 3 = 0$ *тигезләмәсенең графигы* яки l турысы $x + y - 3 = 0$ (яки $x + y = 3$) тигезләмәсенең *геометрик моделе*, диләр.

Шулай итеп, әгәр $(x; y)$ саннар пары $x + y - 3 = 0$ тигезләмәсен канәгатьләндерсә, $M(x; y)$ ноктасы l турысында ята; әгәр $M(x; y)$ ноктасы l турысында ятса, $(x; y)$ пары $x + y - 3 = 0$

тигезләмәсенең чишелеше була. Мәсәлән, $P(6; -3)$ ноктасы l турысында ята (рәс. 28) һәм (6; −3) пары $-x + y - 3 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше була.

Нәтиҗәләр ясыйбыз:

Сүзләр ярдәмендә ясалган модель	Алгебраик модель	Геометрик модель
Ике санның суммасы 3 кә тигез	$x + y = 3$ (ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә)	28 нче рәсемдәге l турысы (ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәнең графигы)

■

Ә гомумән алганда $ax + by + c = 0$ сызыкча тигезләмәсенең графигы нинди була? Конкрет очракларны карап үтик.

1) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Бу очракта тигезләмә $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$ рәвешен ала, ягъни x, y ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен $0 = 0$. Димәк, теләсә нинди $(x; y)$ саннар пары тигезләмәнең чишелеше була, ә тигезләмәнең графигы — бөтен координаталар яссылыгы.

2) $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ булсын. Ул вакытта тигезләмә $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ яки $c = 0$ рәвешен ала. Бу x, y ның бер генә кыйммәте өчен дә үтәлә алмый, ягъни тигезләмәнең чишелешләре була алмый.

3) $a = 0$, $b \neq 0$ булсын. Тигезләмә бу очракта $0 \cdot x + by + c = 0$ рәвешен ала, ягъни $y = -\frac{c}{b}$. Графигы булып x күчәренә параллель туры хезмәт итә, бу турыда 6 нчы параграфта сөйләнде.

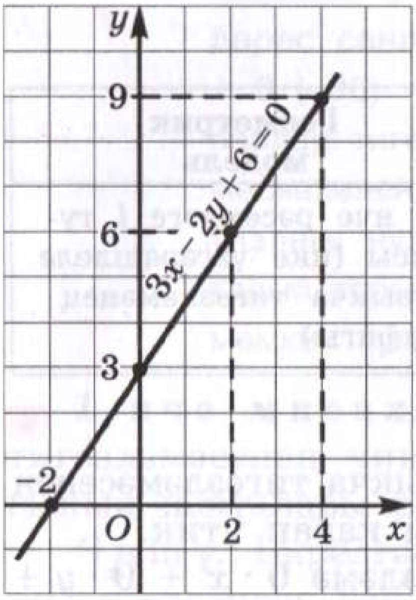
4) $a \neq 0$, $b = 0$. Ул очракта тигезләмә $ax + 0 \cdot y + c = 0$ рәвешен ала, ягъни $x = -\frac{c}{a}$. Графигы булып y күчәренә параллель үткәрелгән туры хезмәт итә, бу турыда да 6 нчы параграфта сөйләнде.

5) $a \neq 0$, $b \neq 0$. Бу очракта график — координата күчәренең берсенә дә параллель булмаган туры (1 нче мисалдагы кебек).

Гомумән, түбәндәге теорема үтәлә.

Теорема 1. ***Сызыкча $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең кимендә бер коэффициенты нульгә тигез булмаса, тигезләмәнең графигы булып туры сызык тора.***

2 нче мисал. $3x - 2y + 6 = 0$ тигезләмәсенең графигын төзергә.



Рәс. 29

Чишү. Бирелгән тигезләмәгә берничә чишелеш сайлап алыйк:

1) (0; 3); чынлап та, $x = 0$, $y = 3$ булганда, $3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$ — дөрес тигезлек (без $3x - 2y + 6 = 0$ тигезләмәсенә $x = 0$, $y = 3$ кыйммәтләрен куйдык);

2) (−2; 0), чыннан да, әгәр $x = -2$, $y = 0$ булса, $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 6 = 0$ — дөрес тигезлек;

3) (2; 6); әгәр $x = 2$, $y = 6$ булса, $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 0$ — дөрес тигезлек;

4) (4; 9); әгәр $x = 4$, $y = 9$ булса, $3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 6 = 0$ — дөрес тигезлек.

xOy координаталар яссылыгында (0; 3), (−2; 0), (2; 6), (4; 9) нокталарын табабыз. Алар бер туры өстендә яталар, аны үткәрәбез (рәс. 29). Әлеге туры $3x - 2y + 6 = 0$ тигезләмәсенең графигы була.

2 нче мисал дөрес чишелде, әмма бер дә рациональ булмады. Ни өченме? Әйдәгез фикер йөртәбез.

1. Без инде беләбез, $3x - 2y + 6 = 0$ сызыкча тигезләмәсенең графигы туры сызык була (бу беренче теоремада раслана). Туры үткәрү өчен аның ике ноктасын күрсәтү дә җитә. Ике нокта аша туры һәм бары берне генә үткәрергә мөмкин — геометрия шулай өйрәтә. Шуңа күрә алда төзелгән дүрт нокта кирәгеннән артык киткән. (0; 3) һәм (−2; 0) нокталарын төзү һәм алар аша линейка ярдәмендә туры үткәрү җитә иде.

2. Бу тигезләмәнең чишелешләрен без сайлап алдык, ягъни уйлап таптык. Уйлап табу һәрвакыт ниндидер бер кагыйдә буенча эшләүгә караганда кыенрак. Биредә дә ниндидер кагыйдә буенча эшләп булмый микән? Була, әлбәттә. Мәсәлән, болай. Үзгәрешле x ка билгеле бер кыйммәт бирик, мәсәлән, $x = 0$ (гадәттә $x_1 = 0$ дип язалар). Аны $3x - 2y + 6 = 0$ тигезләмәсенә куеп табабыз: $3 \cdot 0 - 2y + 6 = 0$ яки $-2y + 6 = 0$. Бу тигезләмәдән табабыз: $y = 3$ (гадәттә $y_1 = 3$ дип язалар).

Димәк, $x = 0$ булса, $y = 3$; (0; 3) пары — бу тигезләмәнең чишелеше.

Үзгәрешле x ка тагын бер кыйммәт, мәсәлән, $x = -2$ не бирәбез ($x_2 = -2$ дип язалар). Бу кыйммәтне $3x - 2y + 6 = 0$ тигезләмәсенә куябыз: $3\cdot(-2) - 2y + 6 = 0$, ягъни $-2y = 0$. Бу тигезләмәдән $y = 0$ не табабыз: $y = 0$ ($y_2 = 0$ дип язалар). Димәк, $x = -2$ булса, $y = 0$; (–2; 0) пары — тигезләмәнең чишелеше.

Менә хәзер без $ax + by + c = 0$ сызыкча тигезләмәсенең (биредә, исегезгә төшерәбез, a, b, c — теләсә нинди саннар, тик $a \neq 0$, $b \neq 0$) графигын төзү алгоритмын формалаштырып әйтә алабыз.

$ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең графигын төзү алгоритмы (биредә $a \neq 0$, $b \neq 0$)

1. Үзгәрешле x ка билгеле бер кыйммәт бирергә, $x = x_1$; $ax_1 + + by + c = 0$ тигезләмәсеннән тиңдәшле $y = y_1$ кыйммәтен табарга.
2. Үзгәрешле x ка икенче кыйммәт бирергә: $x = x_2$; $ax_2 + by + + c = 0$ тигезләмәсеннән тиңдәшле $y = y_2$ кыйммәтен табарга.
3. xOy координаталар яссылыгында (x_1; y_1), (x_2; y_2) нокталарын төзергә.
4. Бу ике нокта аша туры үткәрергә — ул $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең графигы булыр.

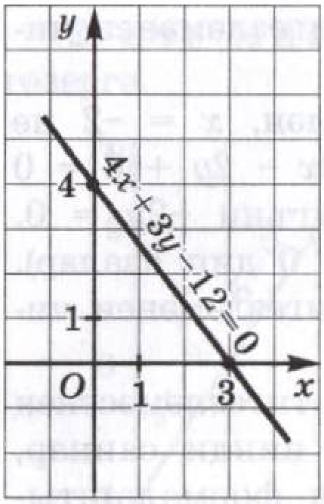
Искәрмә. Күпчелек очракта алгоритмның беренче адымында $x = 0$ кыйммәтен сайлыйлар. Икенче адым кайвакыт үзгәртелә: $y = 0$ дип алалар да x ның тиңдәшле кыйммәтен табалар.

3 нче мисал. $4x + 3y - 12 = 0$ тигезләмәсенең графигын төзергә.

Чишү. Алгоритм буенча эшлибез (искәрмәне дә исәпкә алабыз).

1) Әйтик, $x = 0$ дип алып, аны $4x + 3y - 12 = 0$ тигезләмәсенә куябыз: $4 \cdot 0 + 3y - 12 = 0$, $3y - 12 = 0$, $y = 4$.

2) Шулай ук $y = 0$ дип алабыз һәм бу кыйммәтне $4x + + 3y - 12 = 0$ тигезләмәсенә куябыз: $4\cdot x + 3\cdot 0 - 12 = 0$, $4x - 12 = 0$, $x = 3$.



Рәс. 30

3) xOy координаталар яссылыгында ике нокта төзибез: (0; 4) — ул алгоритмның беренче адымында табылды һәм (3; 0) — икенче адымда табылды.

4) (0; 4) һәм (3; 0) ноктаалары аша туры үткәрәбез. Эзләнгән график шушы була (рәс. 30).

4 нче мисал. Галиев һәм Сәлимов үзләренең бакчаларында алмагачлар утырткаңнар. Сәлимов Галиевкә караганда 2,5 тапкыр күбрәк агач утырткан. Икенче елда алар, яңа үсентеләр утыртып, алмагачларның санын арттырганнар. Галиевнең агачлары саны узган елдагыдан 3 тапкыр, ә Сәлимовның 2 тапкыр артып киткән. Нәтиҗәдә аларның барлык агачлары саны 16 булган. Беренче елда алар ничәшәр алмагач утырткаңнар?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, беренче елда Галиев x алмагач, ә Сәлимов y алмагач утырткан булсын. Мәсьәләнең шарты буенча $y = 2{,}5x$. Бу очракта тигезләмәнең ике ягын да 2 гә тапкырлау отышлы була: $2y = 5x$. Бу тигезләмәне түбәндәгечә язабыз:

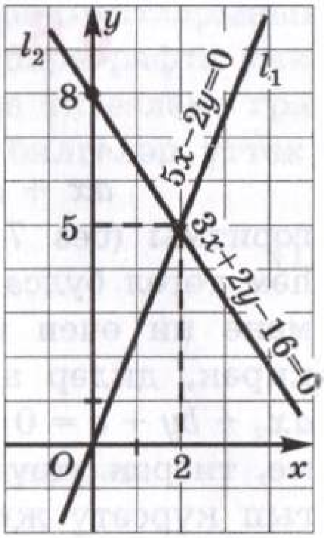
$$5x - 2y = 0. \quad (1)$$

Икенче елда Галиев үз бакчасындагы алмагачлар санын 3 тапкыр арттыра, димәк, аның агачлары хәзер $3x$ була. Сәлимов исә алмагачлар санын 2 тапкыр арттыра, ягъни аның инде $2y$ алмагачы була. Шарт буенча икесенең бергә алмагачлары 16 га җитә, ягъни $3x + 2y = 16$. Бу тигезләмәне үзгәртеп күчереп язабыз:

$$3x + 2y - 16 = 0. \quad (2)$$

Мәсьәләнең математик моделе әзер, ул ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмәдән — (1) һәм (2) тигезләмәләреннән тора. Гадәттә, мондый очракларда тигезләмәләрне берсе астына икенчесен язалар һәм махсус символ — *фигуралы җәя* һәм *тигезләмәләр системасы* дигән махсус термин кулланалар:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \quad (3)$$



Рәс. 31

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

Безне кызыксындырган (x; y) саннар пары (1) тигезләмәне дә, (2) тигезләмәне дә канәгатьләндерергә, ягъни без эзләгән (x; y) ноктасы (1) туры өстендә дә, (2) туры өстендә дә ятарга тиеш. Нәрсә эшләргә? Җавап ачык: (1) турыны, аннан соң (2) турыны төзергә һәм бу турыларның кисешү ноктасын табарга кирәк.

1) $5x - 2y = 0$ тигезләмәсенең графигын төзибез. Әгәр $x = 0$ булса, $y = 0$; әгәр $x = 2$ булса, $y = 5$ була. (0; 0) һәм (2; 5) нокталары аша l_1 турысын үткәрәбез (рәс. 31).

2) $3x + 2y - 16 = 0$ тигезләмәсенең графигын төзибез. Әгәр $x = 0$ булса, $y = 8$; әгәр $x = 2$ булса, $y = 5$ була. (0; 8) һәм (2; 5) нокталары аша l_2 турысын үткәрәбез (рәс. 31).

3) l_1 һәм l_2 турылары (2; 5) ноктасында кисешәләр, ягъни $x = 2$, $y = 5$.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Беренче елда Галиевнең һәм Сәлимовның ничәшәр алмагач утыртуын, ягъни x һәм y ничәгә тигез икәнен белергә кирәк иде. Бу сорауга җавап инде табылды: $x = 2$, $y = 5$.

Җавап: беренче елда Галиев — 2 алмагач, Сәлимов 5 алмагач утырткан.

Күргәнегезчә, без сезнең белән юкка гына ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәләрнең графикларын төзергә өйрәнмәгәнбез икән. Бу безгә бер математик модельдән (алгебраик модель (3)) икенче математик модельгә (геометрик модель — 31 нче рәсемдәге координаталар яссылыгында ике туры) күчәргә һәм мәсьәләне ахыргача чишеп бетерергә мөмкинлек бирде.

Геометрик модельгә күчмичә генә, турыдан-туры (3) моделе белән эшләп буламы? Була, тик без бу турыда 3 нче бүлектә сөйләшербез. Анда, яңа белемнәребезне кулланып, кабаттан (3) модельгә әйләнеп кайтачакбыз.

§ 8. СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯ һӘМ АНЫҢ ГРАФИГЫ

$ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең графигын төзү алгоритмы (без 7 нче параграфта формалаштырдык) бик ачык һәм төгәл булса да, математикларга бик ошап бетми. Тигезләмәне ни өчен ике тапкыр y үзгәрешлесенә карата чишәргә кирәк, диләр алар: башта $ax_1 + by + c = 0$ һәм аннан соң $ax_2 + by + c = 0$ чишелә. Исәпләүләрне җиңелрәк һәм, иң мөһиме, тизрәк үтәү өчен y ны $ax + by + c = 0$ тигезләмәсеннән чыгып күрсәтү җиңелрәк булмасмы? Әйдәгез тикшереп карыйк.

Башта $3x - 2y + 6 = 0$, ягъни $2y = 3x + 6$ тигезләмәсен тикшерербез (7 нче параграфтан 2 нче мисал).

Тигезләмәнең ике ягын да $\frac{1}{2}$ гә тапкырлап табабыз: $\frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{1}{2}(3x + 6)$, ягъни $y = \frac{3}{2}x + 3$. Хәер, тигезләмәнең ике өлешен 2 гә буынлап бүлсәк тә, шушы ук нәтиҗәне алган булыр идек. Гадәттә мондый очракларда тигезләмәнең ике ягын да бер үк санга буынлап тапкырлау түгел, ә буынлап бүлү турында сөйлиләр.

Шулай итеп, $y = \frac{3}{2}x + 3$.

x ка конкрет кыйммәтләр биреп, y ның тиңдәш кыйммәтләрен исәпләү авыр түгел. Мәсәлән, $x = 0$ булганда $y = 3$; $x = -2$ булганда — $y = 0$; $x = 2$ булганда $y = 6$; $x = 4$ булганда $y = 9$ килеп чыга. Күргәнегезчә, $(0; 3)$, $(-2; 0)$, $(2; 6)$ һәм $(4; 9)$ нокталары бик җиңел һәм тиз табылды.

Нәкъ шундый юл белән $5x - 2y = 0$ (7 нче параграфтан 4 нче мисал) тигезләмәсен дә $2y = 5x$ һәм аннан соң $y = 2{,}5x$ рәвешенә үзгәртеп була; бу тигезләмәне канәгатьләндерә торган $(0; 0)$ һәм $(2; 5)$ нокталарын табу кыен түгел. Ниһаять, шул ук мисалдагы $3x + 2y - 16 = 0$ тигезләмәсен $2y = 16 - 3x$ һәм аннан соң $y = 8 - \frac{3}{2}x$ рәвешенә үзгәртергә мөмкин. Бу тигезләмәдән аны ук канәгатьләндерә торган $(0; 8)$ һәм $(2; 5)$ нокталарын табарга була.

Хәзер әлеге рәвеш үзгәртүләрне гомуми төстә карап үтәбез.

$ax + by + c = 0$ тигезләмәсендә a һәм b коэффициентларының икесенең дә нульгә тигез очрагын без 7 нче параграфта тикшергән идек. Шунда ук $a \neq 0$, $b = 0$ очрагында тигезләмә графигының y күчәренә параллель туры икәнен билгеләп үттек.

Хәзер $b \neq 0$ очрагын карыйбыз.

$$ax + by + c = 0; \tag{1}$$

$$by = -ax - c;$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Бирелә $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = m$ дип билгеләсәк:

$$y = kx + m.$$

игътибар итегез

Шулай итеп, *ике үзгәрешлеле (x һәм y) сызыкча тигезләмәсен* (1), *$b \neq 0$ булганда:*

$$y = kx + m \tag{2}$$

рәвешенә китерергә мөмкин, биредә k, m — саннар (коэффициентлар).

Бу — сызыкча тигезләмәнең аерым очрагы. Үзгәрешле x ның нәрсәгә тигез икәнен белгәннән соң, $y = kx + m$ кагыйдәсе буенча y ның кыйммәтен һәрвакыт табарга мөмкин. Тигезләмәне (2) **сызыкча функция** дип атыйбыз.

(2) тигезләмә ярдәмендә, x ның конкрет кыйммәтен күрсәтеп, y ның тиңдәшле кыйммәтен исәпләү бик җиңел. Әйтик, мәсәлән, $y = 2x + 3$ ди. Ул чагында:

әгәр $x = 0$ булса, $y = 3$;
әгәр $x = 1$ булса, $y = 5$;
әгәр $x = -1$ булса, $y = 1$;
әгәр $x = 3$ булса, $y = 9$ һ.б.

Гадәттә нәтиҗәләрне таблица рәвешендә язалар:

x	0	1	–1	3
y	3	5	1	9

Таблицаның икенче юлындагы y ның кыйммәтләрен *$y = 2x + 3$ сызыкча функциясенең $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$ нокталарындагы тиңдәшле кыйммәтләре* диләр.

бəйсез үзгəрешле (аргумент)

бəйле үзгəрешле

сызыкча функция

сызыкча функциянең графигы

(1) тигезлəмəсендə x һəм y үзгəрешлелəре тигез көчле, ə (2) тигезлəмəсендə алай түгел. Без аларның берсенə — x үзгəрешлесенə генə конкрет кыйммəтлəр бирəбез, ə y үзгəрешлесенең кыйммəте x ның сайлап алынган шушы кыйммəтенə бəйле. Шуңа күрə, гадəттə, x — **бəйсез үзгəрешле** (яки **аргумент**), y — **бəйле үзгəрешле**, дилəр.

7 нче параграфтагы 1 нче теореманың аерым очрагы булган теорема болай әйтелə:

Теорема 2. ***$y = kx + m$ сызыкча функциясенең графигы туры сызык була.***

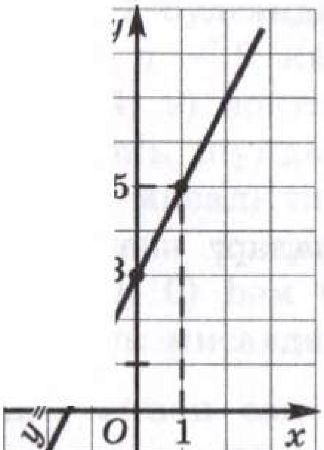
1 нче мисал. $y = 2x + 3$ сызыкча функциясенең графигын төзергə.

Чишү. Таблица төзибез:

x	0	1
y	3	5

xOy координаталар яссылыгында (0; 3) һəм (1; 5) ноктала-
тəзибез һəм алар аша туры үткəрəбез. Ул $y = 2x + 3$ сы-
ı функциясенең графигы була (рəс. 32).

ʼп кенə реаль хəллəрне сызыкча функциядəн гыйбарəт
н математик модельлəр рəвешендə сурəтлəргə мөмкин.
ıлар китерик.



Рəс. 32

Беренче ситуация. Складта 500 т күмер булган. Көн саен 30 ар т күмер китерə башлаганнар. Складта 2, 4, 10 көннəн соң күпме күмер булыр?

Складтагы күмер y (тонналарда) x көн узганнан соң $y = 500 + 30x$ формуласы белəн исəплəнер. Шулай итеп, $y = 30x + 500$ сызыкча функциясе ситуациянең математик моделе була.

Хəзер исəплəүлəр кыен түгел:

$x = 2$ булганда, $y = 560$ ($y = 30x + 500$ тигезлəмəсенə x ны куеп, $y = 560$ ны табабыз);

$x = 4$ булганда, $y = 620$;

$x = 10$ булганда, $y = 800$.

Икенче ситуация. Складта 500 т күмер булган. Көн саен 30 ар т күмерне алып китә башлыйлар. Складта 2, 4, 10 көннән соң күпме күмер булыр?

Биредә ситуациянең математик моделе булып $y = 500 - 30x$ сызыкча функциясе тора. Шушы модель ярдәмендә мәсьәләнең соравына җавап бирү кыен түгел:

әгәр $x = 2$ булса, $y = 440$ ($y = 500 - 30x$ тигезләмәсенә $x = 2$ не куеп, $y = 440$ ны табабыз);

әгәр $x = 4$ булса, $y = 380$;

әгәр $x = 10$ булса, $y = 200$.

Өченче ситуация. Турист A пунктыннан B пунктына кадәр автобуста 15 км юл уза, ә аннан соң 4 км/сәг тизлек белән шул ук юнәлештә җәяү китә. Турист, җәяү китеп, 2 сәг тән, 4 сәг тән, 6 сәг тән соң A пунктыннан нинди ераклыкта тора?

Әлеге ситуациянең математик моделе булып $y = 15 + 4x$ сызыкча функциясе тора, биредә x — җәяү барылган вакыт (сәгатьләрдә), y — A пунктыннан ераклык (километрларда). Бу модель ярдәмендә мәсьәләнең соравына җавап бирәбез:

әгәр $x = 2$ булса, $y = 23$ ($y = 15 + 4x$ тигезләмәсенә $x = 2$ не куеп, $y = 23$ не таптык);

әгәр $x = 4$ булса, $y = 31$;

әгәр $x = 6$ булса, $y = 39$.

Димәк, бер карап үткән һәр ситуациядә математик модель булып сызыкча функция хезмәт итә. Тик (игътибар!), җентеклəбрәк якын килсәк, төзелгән өч математик модель дә бик үк төгәл түгел, үзгәрешлегә мәсьәләнең мәгънәсеннән чыгып куелган чикләмәләр аларда исәпкә алынмый. Ә бит беренче ситуациядә x үзгәрешлесе бары тик 1, 2, 3, ... кыйммәтләрен генә алырга мөмкин, чөнки x — көннәр саны. Димәк, беренче ситуациянең төгәл күрсәтелгән математик моделе болай күрсәтелә:

$$y = 500 + 30x, \text{ биредә } x \text{ — натураль сан.}$$

Икенче ситуациядә $y \geqslant 0$ шартын өстәргә кирәк. Биредә беренче ситуациядәге кебек үк көннәр санын аңлаткан x бәйсез үзгәрешлесе 1, 2, 3, ..., 16 кыйммәтләрен генә алырга мөмкин. Чынлап та, $x = 16$ булганда, $y = 500 - 30x$ формуласы буенча табабыз: $y = 500 - 30 \cdot 16 = 20$. Димәк, 17 нче көнне складтан 30 т күмер алып чыгып булмаячак, чөнки бу көнгә анда

бары 20 т гына күмер кала, һәм бу эшне туктатырга туры киләчәк. Шунлыктан икенче ситуациянең төгәл математик моделе мондый була:

$$y = 500 - 30x, \ y \geqslant 0 \text{ яки}$$
$$y = 500 - 30x, \text{ биредә } x = 1, 2, 3, ..., 16.$$

Өченче ситуациядә бәйсез үзгәрешле теоретик яктан тискәре булмаган теләсә нинди кыйммәт алырга мөмкин ($x = 0$, $x = 2$, $x = 3{,}5$ һ.б.), әмма чынлыкта турист алсыз-ялсыз бер үк тизлек белән бара алмый. Димәк, безгә дә x ка карата чынбарлыкка туры килерлек чикләмәләр куярга кирәк, мәсәлән, $0 \leqslant x \leqslant 6$ (ягъни турист 6 сәгатьтән артык бармый).

Рәс. 33

Исегезгә төшерик: катгый булмаган икеле $0 \leqslant x \leqslant 6$ тигезләмәсенең геометрик моделе булып координаталар турысындагы $[0; 6]$ кисемтәсе хезмәт итә. Димәк, өченче ситуациянең төгәл математик моделе болай языла: $y = 15 + 4x$, биредә x $[0; 6]$ кисемтәсенә керә.

«x X күплегенә керә» дигән фраза урынына $x \in X$ дип язу кабул ителгән (ул «x элементы X күплегенә керә» дип укыла, $\in$ — *нәрсәгәдер керү тамгасы*). Күреп торасыз, сезнең математика теле белән танышуыгыз һаман дәвам итә. Натураль саннар күплеген гадәттә N хәрефе белән тамгалыйлар.Димәк, «x — натураль сан» дигән аңлатма урынына $x \in N$ язмасын да кулланып була икән.

Әгәр $y = kx + m$ сызыкча функциясен x ның барлык кыйммәтләре өчен дә түгел, ә ниндидер X саны күплегенә керүче кыйммәтләре өчен генә тикшерергә кирәк булса, болай язалар:

$$y = kx + m, \ x \in X.$$

Ә хәзер алда тикшерелгән ситуацияләрнең тагын да төгәлрәк математик модельләрен язабыз.

Беренче ситуация: $y = 500 + 30x$, $x \in \mathrm{N}$.

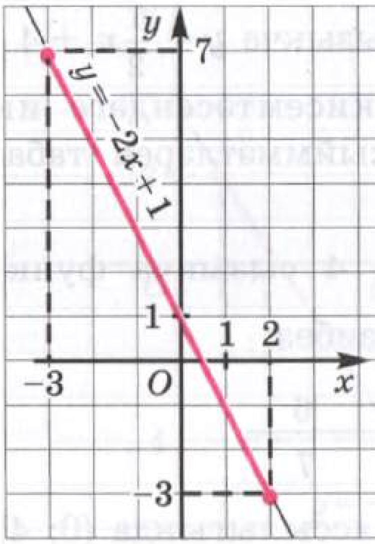
Икенче ситуация: $y = 500 - 30x$, $x \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$.

Өченче ситуация: $y = 15 + 4x$, $x \in [0; 6]$.

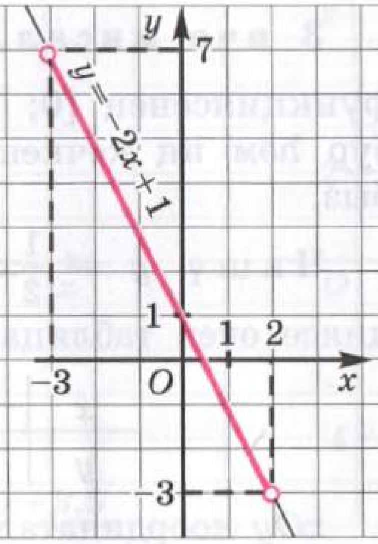
2 нче мисал. Сызыкча функциянең графигын төзергә: а) $y = -2x + 1$, $x \in [-3; 2]$; б) $y = -2x + 1$, $x \in (-3; 2)$.

Чишү. а) Сызыкча $y = -2x + 1$ функциясе өчен таблица төзибез:

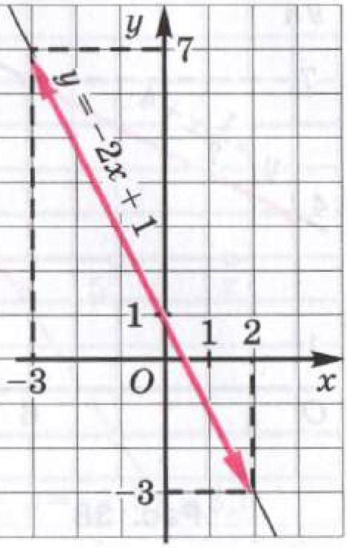
x	−3	2
y	7	−3



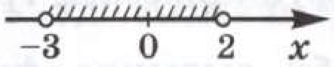
Рәс. 34



Рәс. 35



Рәс. 36

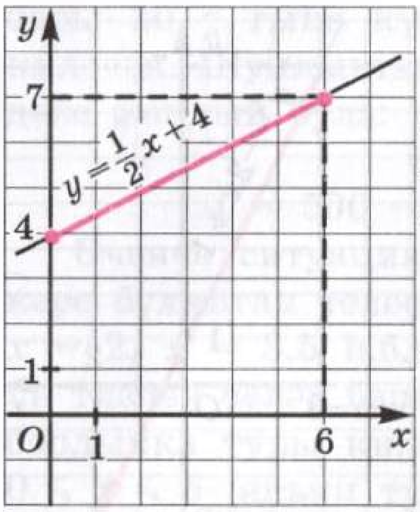


Рәс. 37

xOy координаталар яссылыгында (−3; 7) һәм (2; −3) нокталарын төзибез һәм алар аша туры үткәрәбез. Бу туры — $y = -2x + 1$ тигезләмәсенең графигы. Аннан соң төзелгән нокталарны тоташтыручы кисемтәне аерып алабыз (рәс. 34). Әлеге кисемтә $y = -2x + 1$ ($x \in [-3; 2]$) сызыкча функциясенең графигы була.

Гадәттә болай диләр: без [−3; 2] кисемтәсендә $y = -2x + 1$ сызыкча функциясенең графигын төзедек.

б) Бу мисал алдагысыннан ни белән аерыла? Сызыкча функция шул ук ($y = -2x + 1$), димәк, аның да графигы шул ук туры була. Тик игътибарлы булыгыз! Бу очракта $x \in (-3; 2)$, ягъни $x = -3$ һәм $x = 2$ кыйммәтләре тикшерелми, алар (−3; 2) интервалына <u>кермиләр</u>. Координаталар турысында интервал очларын ничек билгеләгән идек әле? Әйе, буялмаган түгәрәкләр белән (рәс. 37), бу турыда 5 нче параграфта әйтелде. Шулай ук (−3; 7) һәм (2; −3) нокталарын да буялмаган түгәрәкләр белән билгеләргә кирәк булачак. Бу безгә $y = -2x + 1$ турысының түгәрәкләр белән билгеләнгән нокталары арасындагы өлеше (ягъни нокталары) генә алына дигәнне күрсәтә. Кайбер очракларда буялмаган түгәрәкләр түгел, ә уклар белән дә билгелиләр (рәс. 35). Ничек билгеләү мөһим түгел, нәрсә турында сүз барганны аңлау мөһимрәк. ■



Рәс. 38

3 нче мисал. Сызыкча $y=\frac{1}{2}x+4$ функциясенең [0; 6] кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табабыз.

Чишү. $y=\frac{1}{2}x+4$ сызыкча функциясе өчен таблица төзибез:

x	0	6
y	4	7

xOy координаталар яссылыгында (0; 4) һәм (6; 7) нокталарын төзибез һәм алар аша туры үткәрәбез, бу туры $y=\frac{1}{2}x+4$ функциясенең графигы була (рәс. 38).

Безгә бу сызыкча функцияне тулысынча түгел, ә [0; 6] кисемтәсендә, ягъни $x \in [0; 6]$ өчен генә карарга кирәк. Графикның шуңа тиңдәшле кисемтәсе сызымда аерып күрсәтелгән. Шуны искәртәбез: бүленеп алынган өлештәге нокталарның иң зур ординатасы 7 гә тигез һәм ул [0; 6] кисемтәсендә $y=\frac{1}{2}x+4$ сызыкча функциясенең *иң зур кыйммәте* була. Гадәттә $y_{max}=7$ язылышын кулланалар.

функциянең иң зур кыйммәте

функциянең иң кечкенә кыйммәте

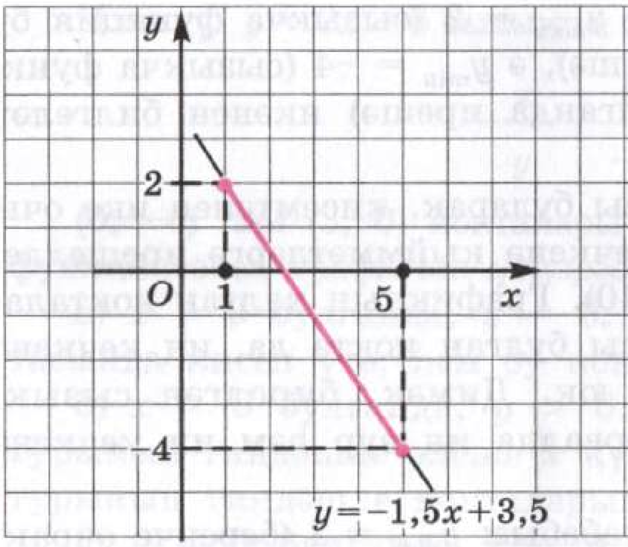
38 нче рәсемдә турының билгеләнгән өлешенә керүче нокталарның иң кечкенә ординатасы 4 кә тигез — һәм ул $y=\frac{1}{2}x+4$ сызыкча функциясенең [0; 6] кисемтәсендәге *иң кечкенә кыйммәте* була. Гадәттә $y_{min}=4$ язылышын кулланалар.

Җавап: $y_{max}=7$, $y_{min}=4$.

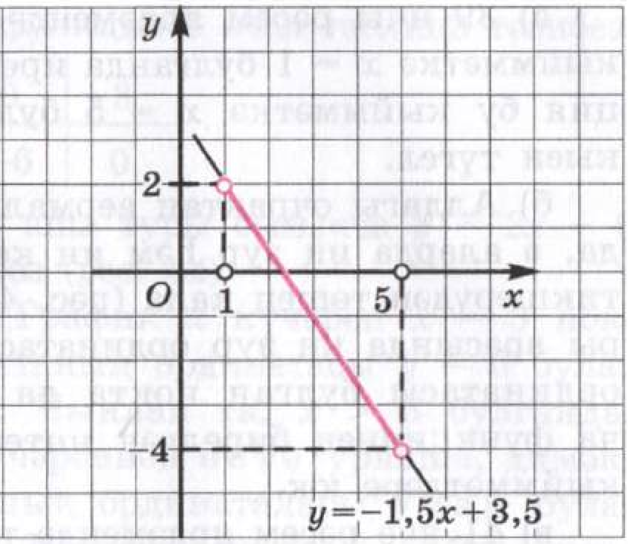
4 нче мисал. $y=-1{,}5x+3{,}5$ сызыкча функциясе өчен:

а) [1; 5] кисемтәсендә;
б) (1; 5) интервалында;
в) [1; 5) ярыминтервалында;
г) $[0; +\infty)$ нурында;
д) $(-\infty; 3]$ нурында

y_{max} һәм y_{min} ны табарга.



Рәс. 39

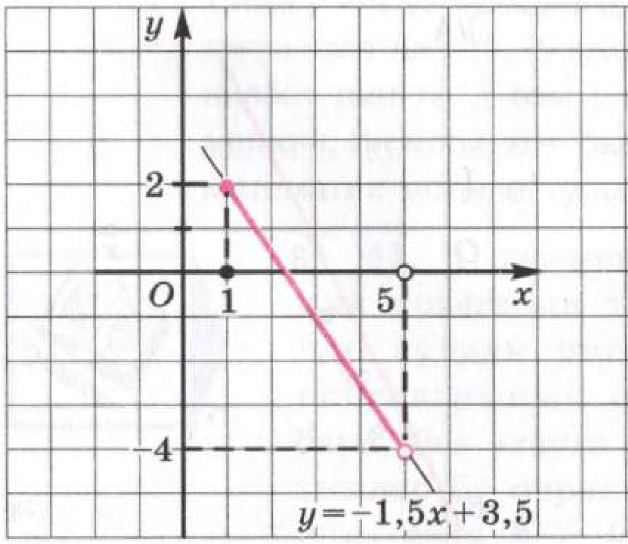


Рәс. 40

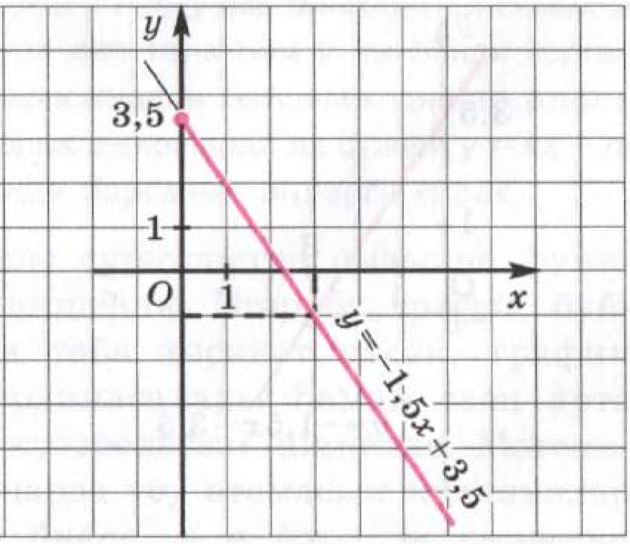
Чишү. $y = -1{,}5x + 3{,}5$ сызыкча функциясе өчен таблица төзибез:

x	1	5
y	2	−4

xOy координаталар яссылыгында (1; 2) һәм (5; −4) нокталарын төзибез һәм алар аша туры үткәрәбез (рәс. 39–43). Төзелгән турыда [1; 5] кисемтәсендә (рәс. 39), (1; 5) интервалында (рәс. 40), [1; 5) ярыминтервалында (рәс. 41), [0; +∞) нурында (рәс. 42), (−∞; 3] нурында (рәс. 43) x ның кыйммәтләренә туры килгән өлешләрне аерып алабыз.



Рәс. 41



Рәс. 42

а) 39 нчы рәсем ярдәмендә $y_{max} = 2$ (сызыкча функция бу кыйммәткә $x = 1$ булганда ирешә), ә $y_{min} = -4$ (сызыкча функция бу кыйммәткә $x = 5$ булганда ирешә) икәнен билгеләү кыен түгел.

б) Алдагы очрактан аермалы буларак, кисемтәнең ике очы да, ә аларда иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләргә ирешелде, тикшерүдән төшеп кала (рәс. 40). Графикның калган нокталары арасында иң зур ординатасы булган нокта да, иң кечкенә ординатасы булган нокта да юк. Димәк, бирелгән сызыкча функциянең бирелгән интервалда иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре юк.

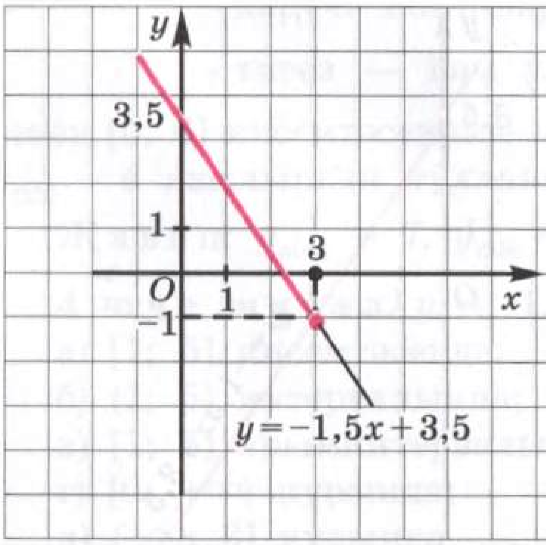
в) 41 нче рәсем ярдәмендә табабыз: $y_{max} = 2$ (беренче очрактагы кебек), ә сызыкча функциянең иң кечкенә кыйммәте юк (икенче очрактагы кебек).

г) $y_{max} = 3{,}5$ (бу кыйммәткә сызыкча функция $x = 0$ булганда ирешә), ә y_{min} булмый (рәс. 42).

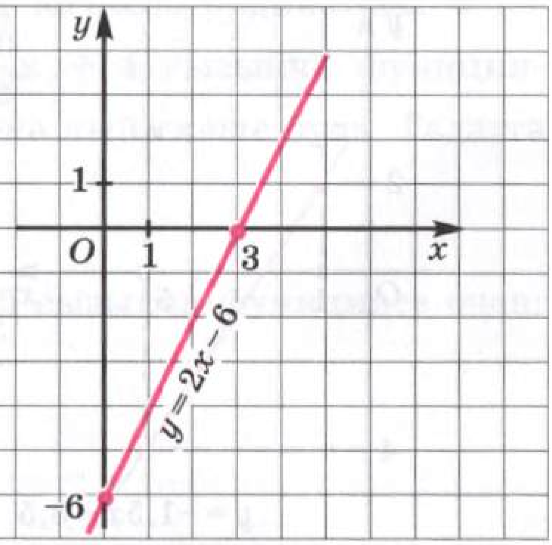
д) $y_{min} = -1$ (бу кыйммәткә сызыкча функция $x = 3$ булганда ирешә), ә y_{max} булмый (рәс. 43). ■

5 нче мисал. $y = 2x - 6$ сызыкча функциясенең графигын төзергә. График ярдәмендә түбәндәге сорауларга җавап бирергә:

а) x ның нинди кыйммәте өчен $y = 0$;
б) x ның нинди кыйммәтләре өчен $y > 0$;
в) x ның нинди кыйммәтләре өчен $y < 0$?



Рәс. 43



Рәс. 44

Чишү. $y = 2x - 6$ сызыкча функциясе өчен таблица төзибез:

x	0	3
y	-6	0

(0; −6) һәм (3; 0) нокталары аша туры сызыкча $y = 2x - 6$ функциясенең графигын үткәрәбез (рәс. 44).

а) $x = 3$ булганда, $y = 0$. График x күчәрен $x = 3$ ноктасында кисеп үтә, һәм бу ноктаның ординатасы $y = 0$ була.

б) $x > 3$ булганда, $y > 0$. Чынлап та, $x > 3$ булганда, турының тиңдәшле өлеше x күчәреннән өстә урнаша, димәк, турының тиңдәшле нокталарының ординаталары уңай була.

в) $y < 0$ булганда $x < 3$. Чынлап та, $x < 3$ булганда, турының тиңдәшле өлеше x күчәреннән аста урнаша, димәк, турының тиңдәшле нокталарының ординаталары тискәре була.

игътибар итегез

Игътибар итегез, бу мисалда без график ярдәмендә чиштек:

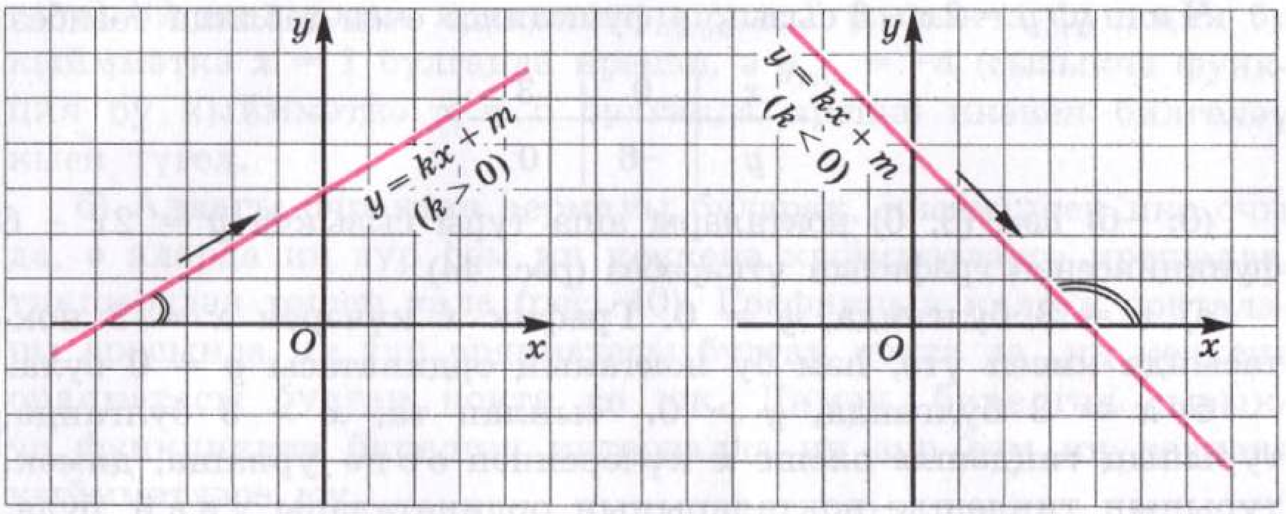
а) $2x - 6 = 0$ тигезләмәсен ($x = 3$);
б) $2x - 6 > 0$ тигезләмәсен ($x > 3$);
в) $2x - 6 < 0$ тигезләмәсен ($x < 3$).

Искәрмә. Сөйләшкәндә, без еш кына бер үк объектны төрлечә атыйбыз, мәсәлән, «йорт», «бина», «корылма», «коттедж», «сарай», «барак», «өй» һ.б. Математика телендә дә шулай дияргә мөмкин. Әйтик, ике үзгәрешлеле $y = kx + m$ (биредә k, m — конкрет саннар) тигезлеген сызыкча функция дип тә, x һәм y ике үзгәрешлеле (яки x һәм y ике билгесезле) сызыкча тигезләмә дип тә, формула дип тә, x һәм y ны бәйли торган нисбәт дип тә, x һәм y арасындагы бәйлелек дип тә атарга мөмкин. Иң мөһиме — барлык очракларда да сүзнең $y = kx + m$ математик моделе турында барганын аңларга кирәк.

сүзлекчә

45, *а* рәсемендә сурәтләнгән сызыкча функция графигын тикшерик. Әгәр бу график буйлап сулдан уңга таба хәрәкәт итсәк, график нокталарының ординаталары һаман саен арта бара, без «тауга күтәреләбез» шикелле. Математиклар бу очракларда *үсү* атамасын кулланалар һәм, ***әгәр $k > 0$ булса, $y = kx + m$ сызыкча функциясе үсә,*** диләр.

үсү
киму



Рәс. 45

Хәзер 45, *б* рәсемендә сурәтләнгән сызыкча функция графигын карыйк. Бу график буенча сулдан уңга таба юнәлсәк, график нокталарының ординаталары һаман саен кечерәя бара, без дә «таудан төшәбез» кебек. Мондый очракларда математиклар *киму* атамасын кулланалар һәм болай диләр: ***әгәр $k < 0$ булса, $y = kx + m$ сызыкча функциясе кими.***

§ 9. $y = kx$ СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯСЕ

Сызыкча $y = kx + m$ функциясен тикшергәндә, $m = 0$ булган очрак аерым карала, ул чагында сызыкча функция $y = kx$ рәвешен ала.

Теорема 3. ***$y = kx$ сызыкча функциясенең графигы координаталар башлангычы аша үтүче туры була.***

Исбатлау. Ике этапка бүлеп исбатлыйбыз.

1. $y = kx$ — сызыкча функциянең аерым очрагы, ә сызыкча функциянең графигы туры була (2 нче теорема буенча); аны l дип билгелибез.

2. $x = 0$, $y = 0$ пары $y = kx$ тигезләмәсен канәгатьләндерә, шуңа күрә (0; 0) ноктасы $y = kx$ тигезләмәсенең графигында, ягъни l турысында ята.

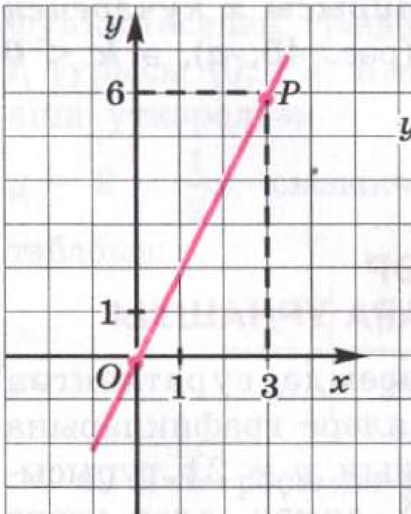
Димәк, l турысы координаталар башлангычы аша үтә. Теорема исбат ителде.

$y = kx$ аналитик моделеннән геометрик модельгә генә түгел, геометрик модельдән аналитигына да күчә белергә кирәк.

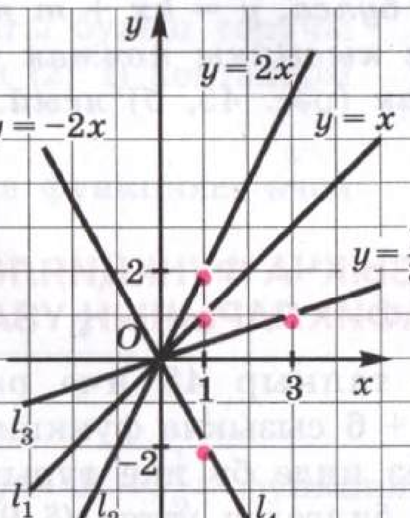
Мәсәлән, xOy координаталар яссылыгында сурәтләнгән (рәс. 46) турыны карап үтик. Ул сызыкча $y = kx$ функциясенең графигы булып тора, бары k коэффициентының кыйммәтен генә табарга кирәк. Биредә $k = \frac{y}{x}$ булганлыктан, турыдагы теләсә кайсы ноктаны алырга һәм аның ординатасының абсциссасына чагыштырмасын табарга кирәк. Туры $P(3; 6)$ ноктасы аша үтә, ә бу нокта өчен $\frac{6}{3} = 2$. Димәк, $k = 2$, ә шунлыктан бирелгән туры сызык $y = 2x$ сызыкча функциясенең графигы булып тора.

Сызыкча $y = kx$ функциясенең графигы гадәттә болай төзелә: $(1; k)$ ноктасы алына (әгәр $x = 1$ булса, $y = kx$ тигезлегеннән $y = k$ икәнлеге табыла) һәм шушы нокта белән координаталар башлангычы аша туры үткәрелә. Хәер, кирәк булганда, $(1; k)$ ноктасын уңайлырак булган башка ноктага да алыштырырга мөмкин. 47 нче рәсемдә $y = x$ (l_1 турысы), $y = 2x$ (l_2 турысы), $y = \frac{1}{3}x$ (l_3 турысы; биредә $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ ноктасын алу бик үк уңышлы түгел, без $(3; 1)$ ноктасын алабыз), $y = -2x$ (l_4 турысы) сызыкча функциясенең графиклары сурәтләнгән.

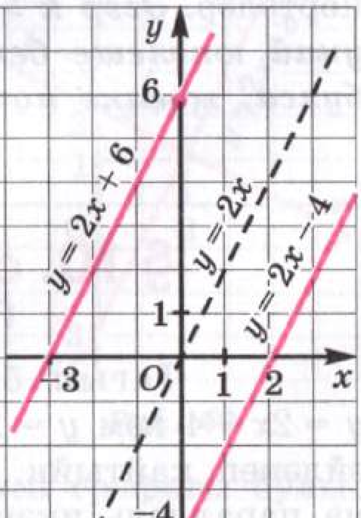
Игътибар итегез: төзелгән туры белән x күчәренең уңай юнәлеше арасындагы почмак k коэффициентына бәйләнгән (бу почмакны x күчәреннән сәгать теленә каршы юнәлешкә таба



Рәс. 46



Рәс. 47



Рәс. 48

почмакча коэффициент

исәплиләр). Әгәр $k > 0$ булса, почмак <u>кысынкы</u> (47 нче рәсемдә l_1, l_2, l_3 турылары шулай урнашкан); әгәр $k < 0$ булса, бу почмак <u>җәенке</u> (47 нче рәсемдә сурәтләнгән l_4 турысы). Ә инде $k > 0$ икән, k зуррак булган саен, почмак та зуррак була. Мәсәлән 47 нче рәсемдә l_3 турысы өчен $k = \frac{1}{3}$, l_1 турысы өчен $k = 1$, l_2 турысы өчен $k = 2$; k коэффициенты арткан саен, туры белән абсциссалар күчәренең уңай юнәлеше арасындагы почмак та арта бара. Шуңа күрә $y = kx$ язылышында k коэффициентын **почмакча коэффициент** дип атыйлар.

48 нче рәсемдә $y = 2x - 4$ һәм $y = 2x + 6$ сызыкча функцияләренең графиклары сурәтләнгән. Алар икесе дә $y = 2x$ сызыкча функциясе графигына параллель, тик беренче туры ($y = 2x - 4$) $y = 2x$ турысын 4 масштаб берәмлегенә аска, ә икенчесе ($y = 2x + 6$) $y = 2x$ турысын 6 масштаб берәмлегенә өскә таба күчерү юлы белән табыла.

Гомуми нәтиҗәне түбәндәге теорема рәвешендә ясарга мөмкин.

Теорема 4. ***$y = kx + m$ сызыкча функциясенең графигы булып торган туры $y = kx$ сызыкча функциясе графигы булып торган турыга параллель.***

Шуның нәтиҗәсендә $y = kx + m$ сызыкча функциясе язылышындагы k коэффициентын да *почмак коэффициент* дип йөртәләр. ***Әгәр $k > 0$ булса, $y = kx + m$ турысы x күчәренең уңай юнәлеше белән кысынкы почмак*** (рәс. 45, *а*), ә $k < 0$ ***булса, җәенке почмак*** (рәс. 45, *б*) ***ясый.***

§ 10. СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯЛӘР ГРАФИКЛАРЫНЫҢ ҮЗАРА УРНАШУЫ

Тагын бер тапкыр 48 нче рәсемдә сурәтләнгән $y = 2x - 4$ һәм $y = 2x + 6$ сызыкча функцияләре графикларына әйләнеп кайтыйк. Без инде бу ике турының $y = 2x$ турысына параллель икәнен билгеләп үттек (§ 9), димәк, алар үзара да параллель була. Параллельлек билгесе булып почмакча коэффициентларның тигезлеге тора (барлык өч туры өчен дә

$k = 2$). Әгәр дә почмакча коэффициентлар төрле булса, мәсәлән, $y = 2x$, һәм $y = 3x + 1$ сызыкча функцияләрендәге кебек, аларның графиклары булып торучы турылар параллель булмый һәм, билгеле инде, үзара туры да килмиләр. Димәк, әлеге турылар кисешәләр. Ә гомумән алганда, түбәндәге теорема дөрес була.

Теорема 5. ***Ике сызыкча функция $y = k_1x + m_1$ һәм $y = k_2x + m_2$ бирелгән булсын. Бирелгән сызыкча функцияләрнең графиклары булып торучы турылар:***

1) әгәр $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$ булса, параллель;

2) әгәр $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ булса, үзара туры киләләр;

3) әгәр $k_1 \neq k_2$ булса кисешәләр.

1 нче мисал. Турыларның кисешү ноктасын табарга:

а) $y = 2x - 3$ һәм $y = 2 - \frac{x}{2}$;

б) $y = -3x + 1$ һәм $y = -3x + 5$.

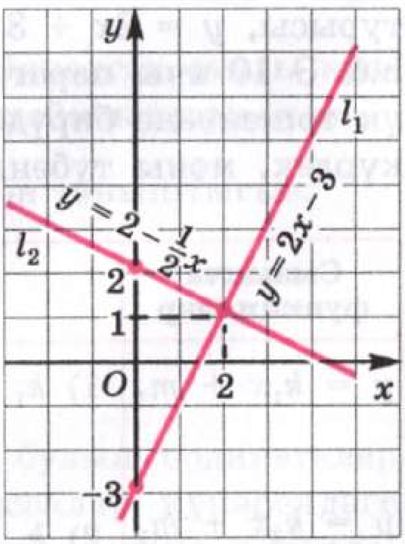
Чишү. а) $y = 2x - 3$ сызыкча функциясе өчен табабыз:

x	0	2
y	−3	1

49 нчы рәсемдә $y = 2x - 3$ сызыкча функциясенең графигы булып торучы l_1 турысы (0; −3) һәм (2; 1) нокталары аша үткәрелгән.

$y = 2 - \frac{1}{2}x$ сызыкча функциясе өчен табабыз:

x	0	2
y	2	1



Рәс. 49

49 нчы рәсемдә $y = 2 - \frac{1}{2}x$ функциясенең графигы булып торучы l_2 турысы (0; 2) һәм (2; 1) нокталары аша үткәрелгән.

l_1 һәм l_2 турылары (2; 1) ноктасында кисешәләр.

б) $y = -3x + 1$ һәм $y = -3x + 5$ сызыкча функцияләренең почмакча коэффициентлары бер үк ($k = -3$), димәк, $y = -3x + 1$ һәм $y = -3x + 5$ турылары параллель була, ягъни аларның кисешү нокталары юк.

2 нче мисал. $y = 4x + 7$ һәм $y = -2x + 7$ турыларының кисешү нокталарын табарга.

Чишү. Биредә сызымнан башка да җавап бирергә була. Болай фикер йөртәбез. Беренчедән, турыларның почмакча коэффициентлары төрле ($k_1 = 4$, $k_2 = -2$), димәк, турылар бер ноктада кисешәләр.

Икенчедән, турыларның һәр икесе (0; 7) ноктасы аша үтә (сез $m_1 = m_2 = 7$ икәненә игътибар иттегезме?).

Димәк, (0; 7) эзләнелгән кисешү ноктасы була.

Гомумән, *$y = k_1x + m$ һәм $y = k_2x + m$,* (биредә $k_1 \neq k_2$) *турылары (0; m) ноктасында кисешәләр.*

2 нче бүлекне тәгалләгәндә, математика теленең үзенчәлекле билгесенә игътибар итәрбез: күп кенә сүзтезмәләрдә (фразаларда) алгебра һәм геометрия телләренең (алар бердәм математика теленең состав өлешләре) элементлары бер үк вакытта очрыйлар. Әйтик, без болай дибез: 3 ноктасы, $x = 2$ турысы, $y = -5$ турысы, $y = 2x + 3$ турысы, [3; 7] кисемтәсе, [–2; +∞) нуры һ.б. Ә 10 нчы параграфта алгебра һәм геометрия телләрен бер үк төшенчәне бирүдә ничек иркен итеп куллану мөмкинлеген күрдек, моны түбәндәге таблицада да күрергә була.

Сызыкча функцияләр	Алгебраик шарт	Геометрик нәтиҗә
$y = k_1x + m_1$	1) $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$	1) $m = k_1x + m_1$ һәм $y = k_2x + m_2$ турылары параллель
$y = k_2x + m_2$	2) $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$	2) $y = k_1x + m_1$ һәм $y = k_2x + m_2$ турылары тәңгәл киләләр
	3) $k_1 \neq k_2$	3) $y = k_1x + m_1$ һәм $y = k_2x + m_2$ турылары кисешәләр

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Без математика теленең сүз запасын түбәндәге атамалар белән баеттык:

яссылыкта турыпочмаклы координаталар системасы (Декарт координаталар системасы);

координаталар яссылыгы, координата почмаклары, координаталар башлангычы;

абсцисса, ордината, абсциссалар күчәре, ординаталар күчәре;

ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә ($ax + by + c = 0$);

ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәне чишү;

бәйсез үзгәрешле (аргумент);

бәйле үзгәрешле;

сызыкча функция ($y = kx + m$);

почмакча коэффициент ($y = kx + m$ сызыкча функциясе өчен).

Без түбәндәге билгеләнешләрне керттек:

xOy (яссылыктагы турыпочмаклы координаталар системасы өчен);

$M(x; y)$ (координаталар яссылыгында M ноктасының координаталарын белү өчен);

y_{max}, y_{min} (сызыкча функциянең бирелгән санлы аралыктагы иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре өчен).

Сез өч яңа математик модель белән таныштыгыз:

$y = kx$;

$y = kx + m$;

$ax + by + c = 0$.

Сез түбәндәгеләрне белдегез:

$x = a$ тигезләмәсенең графигы булып ординаталар күчәренә параллель һәм абсциссалар күчәрендәге a ноктасы аша үтүче туры тора; аерым алганда, $x = 0$ — ординаталар күчәренең тигезләмәсе;

$y = b$ тигезләмәсенең графигы булып абсциссалар күчәренә параллель һәм ординаталар күчәрендәге b ноктасы аша үтүче туры тора; аерым алганда, $y = 0$ — абсциссалар күчәре тигезләмәсе;

$y = kx$ сызыкча функциясенең графигы булып координаталар башлангычы аша туры тора;

$y = kx + m$ сызыкча функциясенең графигы туры сызык була;

$ax + by + c = 0$ сызыкча тигезләмәсенең графигы булып, a, b коэффициентларының кимендә берсе нульгә тигез булмаган очракта, туры сызык тора.

Без түбәндәге алгоритмнарны өйрәндек:

xOy турыпочмаклы координаталар системасында бирелгән M ноктасының координаталарын табу алгоритмы;

xOy турыпочмаклы координаталар системасында $M(a; b)$ ноктасын төзү алгоритмы;

сызыкча $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең графигын төзү алгоритмы.

3 БҮЛЕК

ИКЕ ҮЗГӘРЕШЛЕЛЕ ИКЕ СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАСЫ

§11. *Төп төшенчәләр*
§12. *Алыштырып кую юлы*
§13. *Алгебраик кушу юлы*
§14. *Реаль ситуацияләрнең математик модельләре буларак, ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системалары*

§11. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

7 нче параграфта без ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә төшенчәсен керттек: $ax + by + c = 0$ тигезлеген шулай дип атыйлар, биредә a, b, c — конкрет саннар, ә x, y — үзгәрешлеләр (билгесезләр).

Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәләргә мисаллар:

$$2x - 3y + 1 = 0;$$
$$x + y - 3 = 0;$$
$$s - 5t + 4 = 0$$

(биредә үзгәрешлеләр башкача: s һәм t дип билгеләнгән, ләкин бу мөһим түгел).

Шул ук 7 нче параграфта без ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмәне чишү төшенчәсен дә керттек: тигезләмәне канәгатьләндерә, ягъни үзгәрешлеләр кергән $ax + by + c = 0$ тигезлеген дөрес санлы тигезлеккә әверелдерә торган теләсә нинди саннар парын $(x; y)$ шулай дип атыйлар. Беренче урында һәрвакыт x үзгәрешлесенең кыйммәтен, икенче урында y үзгәрешлесенең кыйммәтен язалар.

Мисаллар китерик:

1. $(2; 3)$ — $5x + 3y - 19 = 0$ тигезлегенең чишелеше. Чыннан да, $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 19 = 0$ — дөрес санлы тигезлек.

2. $(-4; 2)$ — $3x - y + 14 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше. Чыннан да, $3 \cdot (-4) - 2 + 14 = 0$ — дөрес санлы тигезлек.

3. $\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ — $-0{,}4x + 3y + 7 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше, чөнки $-0{,}4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 7 = 0$ — дөрес санлы тигезлек.

4. (1; 2) — $2x - 3y + 1 = 0$ тигезләмәсенең чишелеше була алмый. Чынлыкта $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$ — дөрес булмаган тигезлек ($-3 = 0$ килеп чыга).

8 нче параграфта без $ax + by + c = 0$ рәвешле математик модельне һәрвакыт тагын да гадирәге $y = kx + m$ белән алыштырып булганны күрдек. Мәсәлән, $3x - 4y + 12 = 0$ тигезләмәсен $y = \frac{3}{4}x + 3$ рәвешенә кертергә мөмкин.

Сызыкча тигезләмәнең ($ax + by + c = 0$) графигы, a, b коэффициентларының берсе генә булса да нульгә тигез булмаган очракта ($a = 0$, $b = 0$ очрагын без бу бүлектә тикшермибез) туры сызык була (7 нче параграфны кара). Бу турыдагы теләсә кайсы ноктаның координаталары $ax + by + c = 0$ тигезләмәсен канәгатьләндерәләр, ягъни тигезләмәнең чишелеше булалар. $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең ничә чишелеше бар соң? $ax + by + c = 0$ тигезләмәсенең графигы булып торучы турыда ничә нокта булса, нәкъ шуның кадәр, ягъни чиксез күп.

Күп кенә реаль ситуацияләр, математика теленә күчергәннән соң, ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмәдән торучы математик модель рәвешендә язылалар. Мондый хәл белән без 7 нче параграфта Галиев һәм Сәлимов утырткан алмагачлар турындагы мәсьәләдә очраштык. Математик модель $5x - 2y = 0$ һәм $3x + 2y - 16 = 0$ тигезләмәләреннән торды, ә безне исә (x; y) кыйммәтләре парының ике тигезләмәне дә *бер үк вакытта* канәгатьләндерә торганы кызыксындыра. Мондый очракларда математик модель ике тигезләмәдән тора диләр, ә *математик модель тигезләмәләр системасыннан гыйбарәт*, диләр.

Гомумән, әгәр ике x һәм y — үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ һәм $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ бирелгән булса, һәм бер үк вакытта ике тигезләмәне дә канәгатьләндерә торган (x; y) кыйммәтләр парларын табарга кирәк булса, бирелгән **тигезләмәләр системасы** турында сүз алып баралар. Системаның тигезләмәләрен берсе астына икенчесен язалар һәм махсус символ — фигуралы җәя белән берләштерәләр:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

сүзлекчә

тигезләмәләр системасы

Бер үк вакытта системаның һәм беренче, һәм икенче тигезләмәсенең чишелеше булып торган $(x;\ y)$ кыйммәтләр пары **системаның чишелеше** дип атала.

системаның чишелеше

Системаны чишү — аның барлык чишелешләрен табу яисә аларның юклыгын билгеләү дигән сүз.

Хәзер без сызыкча тигезләмәләр системасы белән алда да очраштык дип әйтә алабыз: 7 нче параграфта бакчачылар турындагы мәсьәләнең математик моделе шундый иде:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0 \text{ (биредә } x \in N,\ y \in N). \end{cases} \quad (2)$$

Аның чишелеше (2; 5) пары иде, ягъни $x = 2$, $y = 5$. Яңа мисаллар карап үтәрбез.

1 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Чишү. $x + 2y - 5 = 0$ тигезләмәсенең графигы туры сызык була. Үзгәрешле x һәм y ның бу тигезләмәне канәгатьләндерә торган ике пар кыйммәтен табабыз. Әгәр $y = 0$ булса, $x + 2y - 5 = 0$ тигезләмәсеннән $x = 5$ не табабыз. Әгәр $x = 0$ булса, $x + 2y - 5 = 0$ тигезләмәсеннән $y = 2{,}5$ не табабыз. Шулай итеп ике нокта таптык: (5; 0) һәм (0; 2,5). xOy координаталар яссылыгында бу ике нокта аша үтүче турыны төзибез — 50 нче рәсемдә l_1 турысы.

$2x + 4y + 3 = 0$ тигезләмәсенең графигы да туры була. Үзгәрешле $(x,\ y)$ ның бу тигезләмәне канәгатьләндерә торган ике пар кыйммәтен табабыз. Әгәр $y = 0$ булса, $2x + 4y + 3 = 0$ тигезләмәсеннән $x = -1{,}5$ не табабыз. Әгәр $x = 2{,}5$ булса, $2x + 4y + 3 = 0$ тигезләмәсеннән: $5 + 4y + 3 = 0$ һәм $y = -2$. Димәк, ике нокта: (–1,5; 0) һәм (2,5; –2) не таптык.

xOy координаталар яссылыгында бу ике нокта аша үтүче туры төзибез — 50 нче рәсемдә l_2 турысы.

l_1 и l_2 турылары параллель. Мондый геометрик факт бирелгән тигезләмәләр системасы өчен нәрсәне аңлата соң? Әйе, системаның чишелешләре юк (чөнки бер үк вакытта ике тигезләмәне дә канәгатьләндерүче нокталар, ягъни бер үк вакытта l_1 турысында да, l_2 турысында да ятучы нокталар юк).

Җавап: системаның чишелешләре юк.

2 нче мисал. Суммалары 39 га, ә аермалары 11 гә тигез булган ике санны табарга.

Чишү. Әгәр эзләнелгән саннарны x, y дип алсак, $x+y=39$ һәм $x-y=11$ була, һәм бу тигезлекләр бер үк вакытта үтәлергә тиеш:

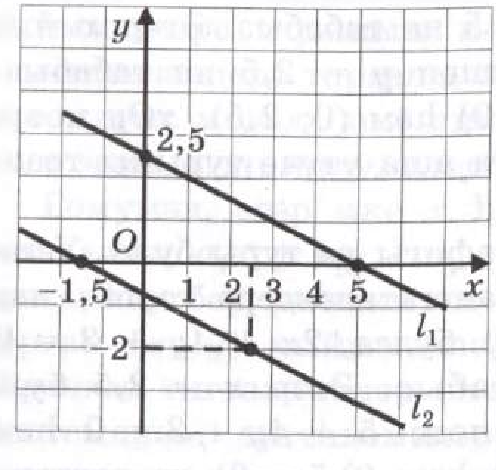
$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x - y = 11. \end{cases} \qquad (4)$$

Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә системасын таптык.

x һәм y ның ничәгә тигез икәнен уйлап табарга мөмкин: $x = 25$, $y = 14$. Тик, беренчедән, «уйлап табу алымы»н чынбарлыкта һәрвакытта да кулланып булмый. Ә икенчедән, башка чишелеш юк дип тә кистереп әйтеп булмый, бәлки, без ахыргача «уйлап табып бетермәгәнбездер»?

$x + y = 39$ һәм $x - y = 11$ тигезләмәләренең графикларын төзергә мөмкин, беренче мисалдан аермалы буларак, алар параллель түгел — бер ноктада кисешәләр. Бу ноктаны без инде беләбез: (25; 14); димәк, әлеге пар без эзләгәнгә туры килә һәм системаның бердәнбер чишелеше була.

Җавап: 25 һәм 14.



Рәс. 50

1 нче һәм 2 нче мисалларда без сызыкча тигезләмәләрне чишүнең **график юлын** кулландык. 7 нче параграфта бакчачылар һәм аларның алмагачлары турындагы мәсьәләне дә шушы ук алым белән чишкән идек.

сүзлекчә

Кызганычка каршы, график юл, «уйлап табу» юлы кебек үк, иң ышанычлысы түгел: мәсәлән, турылар кисешкән ноктаның координаталарын сызымда җиңел генә билгеләп булмый.

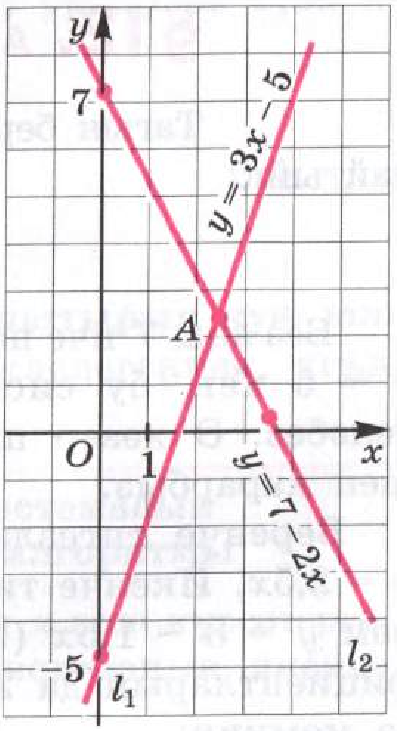
тигезләмәләрне чишүнең график юлы

3 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Чишү. Системадагы тигезләмәләрнең графикларын төзибез. Биредә ике тигезләмәне дә сызыкча функция рәвешенә үзгәртү уңайлырак. Беренче тигезләмәдән — $y = 3x - 5$, ә икенчесеннән $y = 7 - 2x$ килеп чыга.

Бер үк координаталар системасында $y = 3x - 5$ (51 нче рәсемдә l_1 турысы) һәм $y = 7 - 2x$ (52 нче рәсемдә l_2 турысы) сызыкча функцияләренең графикларын төзибез. Алар A ноктасында кисешәләр һәм аның координаталары бирелгән системаның бердәнбер чишелеше була. Ә менә A ноктасының абсциссасын һәм ординатасын төптөгәл итеп 51 нче рәсемнән билгеләп булмый (A ноктасы билгеле бер шакмак эчендә «эленеп тора» кебек). Соңрак без бу мисалга әйләнеп кайтырбыз әле. ■



Рәс. 51

Тик шулай да сызыкча тигезләмәләр системасын чишүнең график юлы зур әһәмияткә ия. Аның ярдәмендә түбәндәге мөһим *нәтиҗәләр* ясала:

(1) системасының ике тигезләмәсенең дә графиклары — турылар;

бу турылар кисешергә мөмкин, әмма бары бер ноктада гына — бу (1) системасының бердәнбер чишелеше бар дигән сүз (шушы параграфта каралган (2), (4), (5) системаларда шулай булды;

бу турылар параллель булырга мөмкин — бу системаның **чишелеше юк** дигән сүз ((3) системасы шундый иде);

сүзлекчә

чишелешсез система

аныксыз система

бу турылар бер-берсе өстендә ятарга мөмкин — бу системаның чишелешләре чиксез күп дигән сүз (система **аныксыз** дип тә әйтәләр).

Шулай итеп, без яңа математик модель (1) — ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасы белән таныштык. Безнең максат — аны чишәргә өйрәнү. «Уйлап табу» алымы ышанычсыз, график юлы да һәрчак коткара дип әйтеп булмый. Димәк, безгә мондый системаларны чишүнең ышанычлы алгебраик юлларын яки алымнарын табарга кирәк. Алдагы параграфларда сүз шул турыда барыр.

§12. АЛЫШТЫРЫП КУЮ ЮЛЫ

Тагын бер тапкыр 11 нче параграфтагы (2) системага кайтыйк:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases}$$

Без аны 7 нче параграфта график юл белән чиштек һәм $x = 2$, $y = 5$ нең бу системасының бердәнбер чишелеше икәнен беләбез. Ә хәзер шушы ук системаны икенче юл белән чишеп карарбыз.

Беренче тигезләмәне $2y = 5x$ рәвешенә китерәбез, ягъни $y = 2{,}5x$. Икенче тигезләмәне $2y = 16 - 3x$ рәвешенә китерәбез һәм $y = 8 - 1{,}5x$ ($2y = 16 - 3x$ тигезләмәсенең барлык коэффициентларын да 2 гә бүләбез). Хәзер системаны болай язарга мөмкин:

$$\begin{cases} y = 2{,}5x, \\ y = 8 - 1{,}5x. \end{cases}$$

Безне x ның $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$ булгандагы кыйммәте кызыксындыра. Бу тигезләмәдән табабыз:

$$2{,}5x + 1{,}5x = 8;$$
$$4x = 8;$$
$$x = 2.$$

Әгәр $x = 2$ булса, $y = 2{,}5x$ тигезләмәсеннән $y = 5$ не табабыз. Шулай итеп, (2; 5) — системаның чишелеше (без моны тапкан идек инде).

алыштырып кую юлы

Әлеге фикер йөртүләр 7 нче параграфтагы фикерләүләрдән ни белән аерыла соң? Биредә бернинди графиклар төзеп торасы булмады, барлык эш алгебра телендә барды. Без ничек фикер йөрттек?

Без беренче тигезләмәдән y ны x аша күрсәттек һәм $y = 2{,}5x$ ны таптык. Аннан соң икенче тигезләмәдә y урынына $2{,}5x$ аңлатмасын куйдык һәм $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$ килеп чыкты. Бу тигезләмәне x ка карата чиштек һәм $x = 2$ булды. Иң соңыннан $y = 2{,}5x$ формуласы буенча y ның тиңдәшле кыйммәтен таптык. Һәм менә нәрсә мөһим: икенче тигезләмәдә y ны x аша күрсәтү бөтенләй мәҗбүри түгел, бирелгән $3x + 2y - 16 = 0$ тигезләмәсендә y урынына $2{,}5x$ ны да куярга мөмкин иде. Карагыз:

$$3x + 2 \cdot 2{,}5x - 16 = 0;$$
$$3x + 5x = 16;$$
$$8x = 16;$$
$$x = 2.$$

Фикер йөртүләрнең мондый алымы **алыштырып кую юлы** дип атала. Ул билгеле бер адымнар эзлеклелегеннән, ягъни ниндидер алгоритмнан гыйбарәт.

Ике үзгәрешлеле ике тигезләмә системасын алыштырып кую юлы белән чишү алгоритмы

1. Системаның беренче тигезләмәсеннән y ны x аша күрсәтергә.
2. Беренче адымда табылган аңлатманы системаның икенче тигезләмәсендә y урынына куярга.
3. Икенче адымда табылган тигезләмәне x ка карата чишәргә.
4. x ның өченче адымда табылган кыйммәтен беренче адымда y ны x аша күрсәткән аңлатмага куярга.
5. Җавапны $(x; y)$ кыйммәтләр пары рәвешендә язарга, өченче һәм дүртенче адымнарда табылган саннар алына.

1 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Чишү. 1) Системаның беренче тигезләмәсеннән табабыз:

$$y = 3x - 5.$$

2) Табылган аңлатманы системаның икенче тигезләмәсендә y урынына куябыз:

$$2x + (3x - 5) - 7 = 0.$$

3) Табылган тигезләмәне чишәбез:

$$2x + 3x - 5 - 7 = 0;$$
$$5x - 12 = 0;$$
$$5x = 12;$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

4) x ның табылган кыйммәтен $y = 3x - 5$ формуласына куябыз:

$$y = 3 \cdot \frac{12}{5} - 5 = \frac{36}{5} - 5 = \frac{36 - 25}{5} = \frac{11}{5}.$$

5) $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ пары — бирелгән системаның бердәнбер чишелеше.

Җавап: $\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Сез бу системаны таныдыгызмы? Без аның белән үткән параграфта очрашкан идек ((5) система), аны график юл белән чишәргә тырышып карадык, әмма төгәл җавап ала алмаган идек. Аның караы алыштырып кую юлы ярдәм итте. Ул тагын да катлаулырак тигезләмәләр системаларында да еш кулланыла; мондый системалар белән без югары сыйныфларда танышырбыз. Бу алым, бәлки, һәрвакыт иң файдалысы да түгелдер (һәрчак җиңел генә булмый), әмма җитәрлек дәрәҗәдә ышанычлы санала.

Алыштырып кую юлы сурәтләнгән биш адымлы алгоритмга әйләнеп кайтыйк. Сезгә ни өчен y ны нәкъ менә беренче тигезләмәдән x аша күрсәтергә һәм икенчесенә куярга, нигә икенче тигезләмәдән беренчесенә куймаска дигән сорау тумадымы? Һәм, гомумән, ни өчен әле y ны x аша күрсәттек, ни өчен x ны y аша түгел, ни өчен шундый тигезсезлек биредә? Җавап: бернинди сәбәп тә юк. Ничек эшләсәгез дә ярый, тик арада иң гади вариантларын сайлап алырга тырышыгыз.

2 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0, \\ x + 12y = 11. \end{cases}$$

Чишү. 1) Икенче тигезләмәдән x ны y аша күрсәтәбез:

$$x = 11 - 12y.$$

2) Табылган аңлатманы системаның беренче тигезләмәсенә x урынына куябыз:

$$5(11 - 12y) - 3y + 8 = 0.$$

3) Табылган тигезләмәне чишәбез:

$$55 - 60y - 3y + 8 = 0;$$
$$63 - 63y = 0;$$
$$63y = 63;$$
$$y = 1.$$

4) y ның табылган кыйммәтен $x = 11 - 12y$ формуласына куябыз:

$$x = 11 - 12 \cdot 1 = -1.$$

5) $x = -1$, $y = 1$ пары— бирелгән системаның бердәнбер чишелеше.

Җавап: (−1; 1).

§ 13. АЛГЕБРАИК КУШУ ЮЛЫ

Без еш кына элегрәк хәл ителгән гамәлләргә кире кайтабыз, мәсәлән, бу ситуациягә башка күзлектән чыгып карау кирәк була. Менә хәзер дә 12 нче параграфтагы 1 нче мисалга кайтырбыз, анда түбәндәге тигезләмәләр системасы каралган иде:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Бу системаны без ничек чиштек? Беренче тигезләмәдән y ны таптык һәм икенче тигезләмәгә куйдык, ул бер билгесезле (x) тигезләмәгә әйләнде, ягъни бу вакытлыча y үзгәрешлесен тикшерүдән калдырып тордык. Әмма y ны тикшерүдән төшереп калдырудан гадирәк юл да бар: системаның тигезләмәләрен кушарга мөмкин (тигезләмәләрне кушу — аерым-аерым тигезләмәләрнең сул яклары суммасын, уң яклары суммасын төзү һәм табылган суммаларны тигезләп кую дигән сүз).

$$+\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0; \end{cases}$$

$$(3x - y - 5) + (2x + y - 7) = 0 + 0;$$

$$5x - 12 = 0;$$

$$x = \frac{12}{5}.$$

Аннан соң x ның табылган кыйммәтен системаның теләсә кайсы тигезләмәсенә, мәсәлән, беренчесенә куярга һәм y ны табарга мөмкин:

$$3 \cdot \frac{12}{5} - y - 5 = 0;$$

$$\frac{36}{5} - 5 = y;$$

$$y = \frac{11}{5}.$$

Шуңа охшаш фикер йөртүләрне тагын берничә сызыкча тигезләмә системалары өчен кулланып карыйк.

1 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

Чишү. 1) Икенче тигезләмәне беренчесеннән алабыз:

$$-\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7; \end{cases}$$

$$(2x + 3y) - (5x + 3y) = 1 - 7;$$

$$2x + 3y - 5x - 3y = -6;$$

$$-3x = -6;$$

$$x = 2.$$

2) Табылган $x = 2$ кыйммәтен бирелгән системаның беренче тигезләмәсенә, ягъни $2x + 3y = 1$ тигезләмәсенә куябыз:

$$2 \cdot 2 + 3y = 1;$$

$$3y = 1 - 4;$$

$$3y = -3;$$

$$y = -1.$$

3) $x = 2$, $y = -1$ пары — бирелгән системаның чишелеше.
Җавап: $(2; -1)$.

2 нче мисал. Тигезләмәләр системасын чишәргә:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Чишү. Биредә тигезләмәләрне кушу яки алу ярдәмендә генә ике тигезләмәдән дә x үзгәрешлесен яки y үзгәрешлесен төшереп калдыру мөмкин түгел. Хәзерлек этабы кирәк булачак. Башта беренче тигезләмәнең барлык буыннарын да 3 кә, ә икенче тигезләмәнең барлык буыннарын 4 кә тапкырлыйбыз. Табабыз:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 15, \\ 8x + 12y = 28. \end{cases}$$

Хәзер тигезләмәләрне кушарга да була — моның белән y үзгәрешлесен төшереп калдырабыз: $17x = 43$, ягъни $x = \frac{43}{17}$.

Бирелгән системаның икенче, ягъни $2x + 3y = 7$ тигезләмәсенә x ның табылган кыйммәтен куябыз:

$$2 \cdot \frac{43}{17} + 3y = 7; \; 3y = 7 - \frac{86}{17}; \; 3y = \frac{119 - 86}{17}; \; 3y = \frac{33}{17}; \; y = \frac{11}{17}.$$

Җавап: $\left(\frac{43}{17}; \frac{11}{17}\right)$.

Табылган чишелешнең кыска язылышы:

$$+\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\overline{3(3x - 4y) + 4(2x + 3y) = 5 \cdot 3 + }$$

Аннан соң табабыз: $17x = 43$, $x = \frac{43}{17}$ һ.б.

алгебраик кушу юлы

Биредә вертикаль сызыкның уң ягына өстәмә тапкырлаучылар языла, алар ярдәмендә системаның ике тигезләмәсендә дә y үзгәрешлесе алдындагы коэффициентларның абсолют зурлыкларын тигезләү мөмкин булды.

Бу параграфта тикшергән алымны **алгебраик кушу юлы** дип йөртәләр.

§ 14. РЕАЛЬ СИТУАЦИЯЛӘРНЕҢ МАТЕМАТИК МОДЕЛЬЛӘРЕ БУЛАРАК, ИКЕ ҮЗГӘРЕШЛЕЛЕ ИКЕ СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАСЫ

Дөресен әйткәндә, бу параграфта сез әллә ни зур яңалык тапмаячаксыз. Сез инде беләсез, реаль ситуация ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасыннан гыйбарәт булган математик модель рәвешендә математика телендә сурәтләнә ала. 7 нче параграфта бакчачылар Галиев һәм Сәлимовлар мәсьәләсендә шулай булды. 11 нче параграфтагы 2 нче мисалда да шулай кабатланды. Шуңа күрә параграф исеменә туры килүче теоретик аңлатма шуның белән тәмам дияргә була. Ә менә практик, ягъни гамәли яктан караганда, яңа ситуацияләрне тикшерү файдалы булачак. Шуның белән шөгыльләник.

Мисал. Дүшәмбе көнне җиденче сыйныфта мәктәпкә бер кыз һәм биш малай килми калган. Шуның белән сыйныфтагы кызлар саны малайлар санынннан ике тапкыр күбрәк булган. Сишәмбе көнне бер малай һәм тугыз кыз килми калган. Бу очракта малайлар саны кызлар санынннан 1,5 тапкыр күбрәк булган. Чәршәмбе көнне дәресләргә барлык балалар да килгән. Җиденче сыйныфта чәршәмбе көн ничә укучы дәресләрдә катнашкан?

Чишү.

<u>Беренче этап</u>. *Математик модель төзү.*

Җиденче сыйныфта x — кызлар саны, y — малайлар саны булсын.

Дүшәмбе көнне $(x - 1)$ кыз, $(y - 5)$ малай килгән. Кызлар бу көнне ике тапкыр күбрәк булган, ягъни

$$x - 1 = 2(y - 5).$$

Сишәмбе көнне $(x - 9)$ кыз, $(y - 1)$ малай килгән. Бу көнне малайлар 1,5 тапкыр күбрәк булган, ягъни

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9).$$

Ситуациянең математик моделе төзелде:

$$\begin{cases} x - 1 = 2(y - 5), \\ y - 1 = 1{,}5(x - 9). \end{cases}$$

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Башта системаның һәр тигезләмәсен гадиләштерәбез.

Беренче тигезләмә өчен:

$$x - 1 = 2(y - 5);$$
$$x - 1 = 2y - 10;$$
$$x - 2y + 9 = 0.$$

Икенче тигезләмә өчен:

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9);$$
$$2(y - 1) = 3(x - 9)$$

(тигезләмәнең ике ягын да икегә тапкырладык);

$$2y - 2 = 3x - 27;$$
$$3x - 2y - 25 = 0.$$

Шулай итеп, ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасын төзедек:

$$\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$$

(карала торган системаның үзгәртелгән математик моделе).

Өйрәнү максатында бу системаны ике төрле юл белән чишәбез.

Беренче юл. Алыштырып кую юлын кулланабыз. Системаның беренче тигезләмәсеннән табабыз: $x = 2y - 9$. Бу нәтиҗәне икенче тигезләмәгә x урынына куябыз. Табабыз:

$$3(2y - 9) - 2y - 25 = 0;$$
$$4y = 52;$$
$$y = 13.$$

$x = 2y - 9$ булганлыктан, $x = 2 \cdot 13 - 9 = 17$.

Шулай итеп, $x = 17$, $y = 13$ — системаның чишелеше.

Икенче юл. Алгебраик кушу юлын кулланабыз:

$$-\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0; \end{cases}$$

$$\overline{(x - 2y + 9) - (3x - 2y - 25) = 0 - 0;}$$

$$x - 2y + 9 - 3x + 2y + 25 = 0;$$
$$-2x + 34 = 0;$$
$$x = 17.$$

Системаның беренче тигезләмәсенә, ягъни $x - 2y + 9 = 0$ тигезләмәсенә x ның табылган кыйммәтен куябыз:

$$17 - 2y + 9 = 0;$$
$$y = 13.$$

Шулай итеп, $x = 17$, $y = 13$ — системаның чишелеше.

Икенче этапны төгәлләдек (табылган системаны хәтта ике юл белән чиштек).

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

«Барлык укучылар да килгәннән соң, җиденче сыйныфта ничә укучы булган?» — дип соралган иде, $x = 17$ һәм $y = 13$, ягъни сыйныфта 17 кыз һәм 13 малай булганлыктан, сыйныфта барысы $17 + 13 = 30$ бала укый дип нәтиҗә ясыйбыз.

Җавап. 30 укучы.

Искәрмә. Конкрет тигезләмәләр системасын чишү өчен, бу очракта иң урынлы дип саналган юлны да, үзегезгә ныграк ошаган юлны да сайлап алырга мөмкин (ягъни сез график юлны, алыштырып кую юлын яки алгебраик кушу юлын файдалана аласыз — барысы да сезнең карамакта). Бу мәсьәләдә төзелгән системаны без ике төрле юл белән чиштек — әлеге ике юлны кабатлау өчен дә, аларны бер-берсе белән чагыштыру өчен дә файдалы булыр.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә без яңа математик төшенчәләр белән таныштык:

ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасы;

тигезләмәләр системасын чишү;

тигезләмәләрнең чишелешсез системасы, аныксыз системасы.

Сез яңа математик модель — ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасы белән таныштыгыз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Без сезнең белән сызыкча тигезләмә системаларын чишүнең өч алымын: график юл, алыштырып кую юлы, алгебраик кушу юлын тикшердек.

4 БҮЛЕК НАТУРАЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ ҺӘМ АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

§ 15. *Нәрсә ул натураль күрсәткечле дәрәҗә*
§ 16. *Төп дәрәҗәләр таблицасы*
§ 17. *Натураль күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре*
§ 18. *Бер үк күрсәткечле дәрәҗәләрне тапкырлау һәм бүлү*
§ 19. *Нуль күрсәткечле дәрәҗә*

§15. НӘРСӘ УЛ НАТУРАЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Без сезнең белән өйрәнергә тиешле математика теленең бер үзенчәлеге булып аның мөмкин кадәр кыскалыкка — кыска язылышларга омтылуы тора. Математик $a + a + a + a + a$ дип язмаячак, ул $5a$ дип яза; $a + a + a + a + a + a + a + a + a + a$ (биредә 10 кушылучы) дип язмый, ә $10a$ дип язачак, $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ кушылучы}}$ урынына na дип яза.

Шуның кебек үк, математик $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ дип тә язмаячак, ул махсус уйлап табылган кыска 2^5 язылышын куллана. Шундый ук бертөрле җиде тапкырлаучы $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ урынына да 3^7 диячәк. Билгеле, кирәк дип табылганда, кире юнәлештә дә хәрәкәт итеп була, мәсәлән, кыска 2^6 язылышын озынрак $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ язылышы белән алыштыралар.

Яңа билгеләнеш килеп чыга икән, яңа атамалар да барлыкка килә. Боларның барысын да (билгеләнешләрне дә, атамаларны да) яңа билгеләмә үз урынына куя. Гадәттә, яңа атаманың, яңа сүзнең, яңа билгеләнешнең асылын аңлатучы җөмләне **билгеләмә** дип йөртәләр. Билгеләмәләр тик торганда гына уйлап табылмый, алар кирәге чыккан вакытта барлыкка килә.

Билгеләмә 1. Һәрберсе a санына тигез булган бертөрле n тапкырлаучының тапкырчыгышы a^n, биредә $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, n$ дип кабул ителгән. Монда a^n аңлатмасын — **дәрәҗә**, a санын — **дәрәҗә нигезе**, n санын **дәрәҗә күрсәткече** дип атыйлар.

дәрәҗә

дәрәҗә нигезе

дәрәҗә күрсәткече

Тагын бер тапкыр искәртәбез, дәрәҗә күрсәткече натураль сан (югары сыйныфларда бу чикләмә алыначак); гадәттә кыскарак итеп әйтелә, *натураль күрсәткеч.* Бу параграфның һәм, гомумән, бу бүлекнең исемен билгели.

Шулай итеп,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}} = a^n;$$

a^n — натураль күрсәткечле дәрәҗә;

a — дәрәҗә нигезе;

n — дәрәҗә күрсәткече.

a^n язылышын «a ның n нчы дәрәҗәсе» дип укыйлар. Искәрмә булып a^2, ул «a ның квадраты» дип укыла («a ның икенче дәрәҗәсе» дип укырга да мөмкин) һәм a^3 тора, анысын «a ның кубы» дип укыйлар («a ның өченче дәрәҗәсе» дип уку мөмкин булса да).

1 нче мисал. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ тапкырчыгышын дәрәҗә рәвешендә язарга һәм тиңдәшле атамаларны кулланырга.

Чишү. Һәрберсе 5 кә тигез булган алты бертөрле тапкырлаучының тапкырчыгышы бирелгәнлектән, язабыз:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6;$$

5^6 — дәрәҗә;

5 — дәрәҗә нигезе;

6 — дәрәҗә күрсәткече.

2 нче мисал. $(-2)^4$ исәпләргә.

Чишү. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16.$

Җавап: 16.

3 нче мисал. Исәпләргә: $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Чишү. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}.$

Җавап: $\frac{8}{27}$.

сорау ?! җавап

Сез ничек уйлыйсыз, 1 нче билгеләмә параграфның исеменә тулысынча туры килә микән? Параграф «Нәрсә ул натураль күрсәткечле дәрәҗә» дип атала, ягъни күрсәткеч сыйфатында теләсә нинди натураль сан торырга мөмкин. Ә 1 нче билгеләмәдә теләсә нинди натураль сан алынганмы соң? Сез бу сорауга ничек дип җавап бирәсез?

Сорауга бергәләп җавап бирәбез: без a^n дәрәҗәсе, биредә $n = 2, 3, 4, ...,$ турында сөйләдек, ә менә $n = 1$ булган очракны күздән ычкындырдык. Бу югалтуны яңа билгеләмә ярдәмендә төзәтәбез.

<u>*Билгеләмә 2*</u>. a санының 1 күрсәткечле дәрәҗәсе дип бу санның үзен атыйлар:

$$a^1 = a.$$

4 нче мисал. a һәм n ның бирелгән кыйммәтләре өчен a^n дәрәҗәсенең кыйммәтләрен исәпләргә.

а) $a = 2{,}5, \quad n = 2;$ д) $a = -1, \quad n = 5;$

б) $a = \frac{1}{3}, \quad n = 4;$ е) $a = 0, \quad n = 1;$

в) $a = -5, \quad n = 1;$ ж) $a = 0, \quad n = 12;$

г) $a = -1, \quad n = 4;$ з) $a = 1, \quad n = 17.$

Чишү. а) $a^n = 2{,}5^2 = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25;$

б) $a^n = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$;

в) $a^n = (-5)^1 = -5$;

г) $a^n = (-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$;

д) $a^n = (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

е) $a^n = 0^1 = 0$;

ж) $a^n = 0^{12} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{12 \text{ тапкырлаучы}} = 0$;

з) $a^n = 1^{17} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{17 \text{ тапкырлаучы}} = 1$.

дәрәҗәгә күтәру

a^n дәрәҗәсен табу гамәлен **дәрәҗәгә күтәрү** дип атыйлар. 4 нче мисалда без дәрәҗәгә күтәрүнең сигез очрагын карадык.

5 нче мисал. Исәпләргә: $7^1 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3$.

Чишү. 1) $7^1 = 7$;

2) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;

3) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

4) $7 \cdot 9 \cdot (-8) = -504$.

Җавап: -504.

Тикшерелгән материалларда без берничә тапкыр тискәре саннарны дәрәҗәгә күтәрдек. Сез шундый закончалыкны сиздегез микән: әгәр тискәре сан *җөп* дәрәҗәгә күтәрелсә, *уңай* сан килеп чыга, ә инде тискәре сан *так* дәрәҗәгә күтәрелсә, *тискәре* сан килеп чыга? Моның ни өчен шулай икәнен аңлатып карагыз.

§ 16. ТӨП ДӘРӘҖӘЛӘР ТАБЛИЦАСЫ

Сез тапкырлау таблицасын беләсез, аңа теләсә кайсы берурынлы ике санның тапкырчыгышлары ($3 \cdot 5$, $4 \cdot 7$ һ.б.) кертелгән һәм исәпләүләр барышында сез һәрвакыт бу таблицадан файдаланасыз. Эш өчен берурынлы гади саннарның дәрәҗәләре таблицасы да файдалы (мең эчендә). Аны төзибез.

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$	$7^1 = 7$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$		
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$		
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Бу таблица ярдәмендә төзелмә саннарның да дәрәҗәләрен табарга мөмкин (шуңа күрә таблицага мондый дәрәҗәләрне кертмиләр). Мәсәлән,

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729.$$

1 нче мисал. $2^n = 128$, $3^k = 243$ икәне билгеле. Кайсы зуррак: n мы яки k мы?

Чишү. Таблица буенча табабыз: $128 = 2^7$, димәк, $n = 7$. Шулай ук таблицадан $243 = 3^5$ икәнен табабыз, димәк, $k = 5$. $7 > 5$ булганлыктан $n > k$.

Җавап: $n > k$.

Дәрәҗәләр таблицасын төзү җиңел булган әле тагын өч сан бар, биредә исәпләүләрнең кирәге юк, һәм нәтиҗә дә алдан билгеле. Болар 1, 0, −1, һәм бу нигезләр өчен дәрәҗәләр таблицасы түбәндәгечә була:

исегездә калдырыгыз

> $1^n = 1$, теләсә нинди n өчен;
> $0^n = 0$, теләсә нинди n өчен;
> әгәр n — җөп сан булса ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$),
> $(-1)^n = 1$;
> әгәр n — так сан булса ($n = 1, 3, 5, 7, \ldots$),
> $(-1)^n = -1$.

Әгәр җөп сан формуласын $n = 2k$ һәм так сан формуласын $n = 2k - 1$ куллансак, болай яза алабыз:

$$(-1)^{2k} = 1; \qquad (-1)^{2k-1} = -1.$$

Ә хәзер дәрәҗә нигезе сыйфатында 10 санын алыйк:

$$10^1 = 10, \qquad 10^2 = 100, \qquad 10^3 = 1000.$$

Игътибар итегез, күрсәткеч ничә булса, 1 цифры артыннан шул сандагы нульләр язарга кирәк.

Гомумән, $$10^n = 1\underbrace{000...0}_{n \text{ нуль}}.$$

Мәсәлән, $10^6 = 1\,000\,000$; $100\,000 = 10^5$.

2 нче мисал. Аңлатманың кыйммәтен табарга:

$$\frac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} + \frac{(10c)^4}{(a+3)^4}$$

$a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ булганда.

Чишү.

1) $\frac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} = \frac{(-1)^{17} + 0^{18} + 1^{19}}{(-1)^{18} - 0^{37} + 1^1} = \frac{-1 + 0 + 1}{1 - 0 + 1} = \frac{0}{2} = 0;$

2) $\frac{(10c)^4}{(a+3)^4} = \frac{(10 \cdot 1)^4}{(-1+3)^4} = \frac{10^4}{2^4} = \frac{10\,000}{16} = 625;$

3) $0 + 625 = 625$.

Җавап: 625.

Параграф ахырында тагын бер тапкыр кабатлыйбыз, математиклар һәрвакыт язылышларның кыскалыгына, фикерләрнең ачыклыгына омтылалар. Шуңа күрә, яңа төшенчә кертелгән саен, алар аның үзлекләрен өйрәнергә керешәләр, ә аннан соң бу үзлекләрне тормышта кулланалар. Натураль күрсәткечле дәрәҗәнең төрле үзлекләре турында алдагы параграфта сөйләшербез. Ә хәзер бераз алга китеп булса да әйтеп үтәбез: әгәр шундый үзлекләрнең берсе турында белгән булсак, 9^3 аңлатмасын без алда күрсәтелгән кебек исәпләмәгән булыр идек. Болай гына язар идек:

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

Күргәнегезчә, ике тапкыр кыскарак. Ә моның ни өчен шулай икәнен 17 нче параграфта белербез.

§ 17. НАТУРАЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘНЕҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

Математик расламаларның күбрәк өлеше өч этаптан торган юл уза.

Беренче этапта кеше күп кенә конкрет очракларда бер үк закончалыкны күреп ала.

Икенче этапта ул үзе күргән закончалыкны гомуми рәвештә формалаштырырга тырыша, ягъни бу закончалык карап үтелгән очракларда гына түгел, шуңа охшаган барлык очракларда да дөрес була дип фикер йөртә.

Өченче этапта ул гомуми рәвештә (гипотетик) формалаштырылган закончалык чынлап та дөрес икәнен исбатларга тырыша.

Нинди дә булса расланманы исбатлау — аның ни өчен дөрес икәнен аңлату ул (ышандырырлык итеп аңлату, «бу дөрес, чөнки ул дөрес» дип түгел). Исбатлау барышында инде билгеле булган фактларга гына таянырга мөмкин.

Әйдәгез, бергәләп шул өч этапны узарга тырышыйк, дәрәҗәләрнең математикларга яхшы таныш булган үзлекләрен мөстәкыйль рәвештә ачарга, формалаштырырга һәм исбатларга тырышып карыйк.

Беренче ачыш

1 нче мисал. Исәпләргә: а) $2^3 \cdot 2^5$; б) $3^1 \cdot 3^4$.

Чишү. а) Табабыз:

$$2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 тапкырлаучы}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 тапкырлаучы}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{8 тапкырлаучы}}.$$

Барысы 8 бер үк төрле тапкырлаучы бар һәм аларның һәрберсе 2 гә тигез, ягъни 2^8. Таблица буенча (§16) бу 256 ны бирә.

б) Табабыз:

$$3^1 \cdot 3^4 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{3}_{\text{1 тапкырлаучы}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 тапкырлаучы}} = 3^5 = 243.$$

Җавап: а) 256; б) 243.

Мисалны чишү барышында без түбәндәгеләрне искәрттек:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8, \text{ ягъни } 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5};$$
$$3^1 \cdot 3^4 = 3^5, \text{ ягъни } 3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4}.$$

Биредә закончалык күзәтелә: тапкырлана торган дәрәҗәләрнең нигезләре бертөрле булганда, күрсәткечләр кушылалар. Беренче этап тәмам.

Икенче этапта без үзебез өчен: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ дигән гомуми закончалык ачтык дигән фараз ясыйк.

Теорема 1. ***Теләсә нинди а саны һәм теләсә нинди натураль n һәм k өчен $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ тигезлеге дөрес.***

Гадәттә, теорема «әгәр ... булса (шарт), ... була (нәтиҗә)» формасында әйтелә. Мәсәлән, 1 нче теореманы түбәндәгечә формалаштырырга мөмкин (дөресрәге, шулай әйтү төгәлрәк тә була әле):

Әгәр а — теләсә нинди сан һәм n, k натураль саннар булса, $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ тигезлеге дөрес була.

Өченче этапта безнең фаразыбызның дөрес икәнен исбатларга, ягъни 1 нче теореманы исбатларга кирәк. Без дә моны эшләрбез — исбатлау түбәндәрәк бирелә. Аны укып чыгыгыз һәм аңларга тырышыгыз (исбатлауда натураль күрсәткечле дәрәҗәнең билгеләмәсе өч тапкыр кулланыла), аңлавы кыенрак бирелсә, укып кына чыгыгыз.

Исбатлау.

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}};$

2) $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ тапкырлаучы}};$

3) $a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ тапкырлаучы}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ тапкырлаучы}} =$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ тапкырлаучы}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+k \text{ тапкырлаучы}} = a^{n+k}.$$

Теорема исбатланды.

Шулай итеп беренче ачышны ясадык. Дәвам итәбез.

Икенче ачыш

2 нче мисал. Исәпләргә: а) $2^6 : 2^4$; б) $3^8 : 3^5$.

Чишү. а) Өлешне вакланма рәвешендә язабыз:

$$2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4.$$

б) $3^8 : 3^5 = \frac{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$

Җавап: а) 4; б) 27.

Чишү барышында без түбәндәгеләрне искәрттек:
$2^6 : 2^4 = 2^2$, ягъни $2^6 : 2^4 = 2^{6-4}$;
$3^8 : 3^5 = 3^3$, ягъни $3^8 : 3^5 = 3^{8-5}$.

Шундый закончалык күзәтелә: бүлүченең һәм бүленүченең нигезләре тигез, бүленүченең күрсәткече бүлүченең күрсәткеченнән зуррак булган вакытта бүленүченең күрсәткеченнән бүлүченең күрсәткече алына. Беренче этап тәмам.

Икенче этапта $a^n : a^k = a^{n-k}$ ($n > k$ булганда) гомуми закончалыгын ачтык дип фараз ясыйбыз.

Теорема 2. ***Теләсә нинди $a \neq 0$ һәм $n > k$ тигезсезлеге үтәлгән теләсә нинди n һәм k натураль саннары өчен $a^n : a^k = a^{n-k}$ тигезлеге үтәлә.***

Сез хәзер «әгәр ... булса, ... була» кебек грамматик язылыштан файдаланып, 2 нче теореманы башкача формалаштыра аласызмы? Бу теоремада шартны һәм нәтиҗәне күрә беләсезме? Үзегез өчен шушы сорауларга җавап бирегез (ә безнең җавап теореманы исбатлаганнан соң китерелә).

Исбатлау. $a^{n-k} \cdot a^k$ тапкырчыгышыннан карыйбыз. Без инде беләбез: нигезләре бертөрле булган дәрәҗәләрне тапкырлаганда, күрсәткечләр кушылалар (бу турыда 1 нче теоремада сөйләнде). $n - k$ һәм k күрсәткечләрен кушып, $(n - k) + k = n$ ны табабыз.

Шулай итеп, $a^{n-k} \cdot a^k = a^n$, ә бу $a^n : a^k = a^{n-k}$ дигән сүз. Теорема исбатланды.

Ә хәзер 2 нче теореманы башкача әйтәбез:

Әгәр $a \neq 0$ һәм n, k — $n > k$ тигезсезлеге үтәлгән натураль саннар булса, $a^n : a^k = a^{n-k}$ тигезлеге дөрес була.

Теореманың шарты: $a \neq 0$; n, k — натураль саннар, $n > k$.
Теореманың нәтиҗәсе: $a^n : a^k = a^{n-k}$.
Икенче ачышны да ясадык. Дәвам итәбез.

Өченче ачыш

3 нче мисал. Исәпләргә: а) $(2^5)^2$; б) $(3^2)^3$.

Чишү. а) Табабыз:

$$(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10} = 1024 \text{ (§16 тан кара).}$$

б) Табабыз:

$$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729 \text{ (§16 тан кара).}$$

Җавап: а) 1024; б) 729.

Мисалны чишү барышында искәрттек:

$$(2^5)^2 = 2^{10}, \text{ ягъни } (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2};$$
$$(3^2)^3 = 3^6, \text{ ягъни } (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3}.$$

Закончалык күзәтелә: ике очракта да, дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргәндә, күрсәткечләр тапкырлана. Беренче этап тәмам.

Икенче этапта $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$ дигән гомуми закончалыкны ачтык дип фаразлыйбыз.

Теорема 3. ***Теләсә нинди а саны һәм теләсә нинди n һәм k натураль саннары өчен $(a^n)^k = a^{nk}$ тигезлеге дөрес була.***

Теореманы исбатлау (өченче этап) параграфның иң ахырында бирелер (хәзергә 1 нче һәм 2 нче теоремаларны исбатлау белән чикләнербез). Теләгегез булса, аны мөстәкыйль рәвештә (яки укытучы ярдәме белән) исбатлап карагыз.

Без сезнең белән өч ачыш ясадык һәм алар өч җитди теоремага алып килде. Бу теоремаларны гамәлдә өч кагыйдә рәвешендә әйтү уңайрак һәм истә калдыру да уңайлы булачак.

1 нче кагыйдә. *Бер үк нигезле дәрәҗәләрне тапкырлаганда, күрсәткечләр кушылалар.*

2 нче кагыйдә. *Бер үк нигезле дәрәҗәләрне бүлгәндә, бүлүченең күрсәткеченнән бүлүченең күрсәткече алына.*

3 нче кагыйдә. *Дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргәндә, күрсәткечләр тапкырлана.*

Бу өч кагыйдәне 1, 2, 3 нче теоремаларның әйтелеше белән чагыштырыгыз. Аерманы сиздегезме? Теоремаларда барысы да үз урынында, барысы да төгәл, ә кагыйдәләрдә фикернең җиңеллеге сизелә, шуңа күрә алар җиңелрәк истә кала һәм кабул ителәләр; кагыйдәләр афоризмнарга охшаганрак. Бу математика теленең тагын бер үзенчәлеге: житди һәм тулысынча эшкәртелгән формулировкалар белән беррәттән кыска һәм афоризмнарны хәтерләткән кагыйдәләр дә кулланыла.

4 нче мисал. Исәпләргә $\dfrac{\left(2^3 \cdot 2^4\right)^5}{\left(2 \cdot 2^8\right)^3}$.

Чишү. 1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (1 нче кагыйдә);

2) $(2^7)^5 = 2^{7 \cdot 5} = 2^{35}$ (3 нче кагыйдә);

3) $2 \cdot 2^8 = 2^{1+8} = 2^9$ (1 нче кагыйдә);

4) $(2^9)^3 = 2^{9 \cdot 3} = 2^{27}$ (3 нче кагыйдә);

5) $2^{35} : 2^{27} = 2^{35-27} = 2^8$ (2 нче кагыйдә);

6) $2^8 = 256$ (§ 16 тан кара).

Җавап: 256.

Тәҗрибәле сүз остасы, тыңлаучылар өчен гаять озын һәм катлаулы чыгышыннан соң, доклад ахырында, һичшиксез, иң мөһим, иң төп сорауларны тагын бер аерып күрсәтә. Без дә катлаулы һәм киеренке эш башкардык, хәзер, әйдәгез, иң төп өлешне аерып алабыз.

Иң мөһиме — өч формула:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k};$$
$$a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ биредә } n > k,\ a \neq 0;$$
$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Аларны уңнан сулга таба да, сулдан уңга таба да кулланырга мөмкин. Мәсәлән,

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8; \quad 2^8 = 2^{4+4} = 2^4 \cdot 2^4; \quad 2^{2+n} = 2^2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n;$$

$$3^7 : 3^1 = 3^6; \quad 3^6 = 3^{10-4} = \underline{\quad}^{0}; \quad 3^{n-4} = \underline{\quad}^{n} = \underline{\quad}^{n};$$

$$(5^3)^4 = 5^{12}; \quad 5^{12} = (5^6)^2 = (5^2)^6 = (5^4)^3 = (5^3)^4.$$

игътибар итегез

Искәрмә. Без бер үк нигезле дәрәҗәләрне бары тик тапкырлау һәм бүлү турында гына сөйләдек. Ә менә аларны кушу һәм алу турында берни дә билгеле түгел. Яңа кагыйдәләр уйлап табарга тырышмагыз. Мәсәлән, $2^4 + 2^3$ суммасын 2^7 белән алыштырырга ярамый; чынлап та, исәпләп карагыз: $2^4 = 16$; $2^3 = 8$; $16 + 8 = 24$, әмма бу һич кенә дә 2^7, ягъни $2^7 = 128$ түгел, $3^5 - 3^4$ аермасын 3^1 белән алыштырырга ярамый, үзегез исәпләгез: $3^5 = 243$; $3^4 = 81$; $243 - 81 = 162$, ә бу инде 3^1, ягъни $3^1 = 3$ түгел. Игътибарлы булыгыз!

Ә хәзер, алдарак вәгъдә иткәнлектән, 3 нче теореманы исбатлыйбыз.

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k \text{ тапкырлаучы}} =$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{\text{һәрберсендә } n \text{ тапкырлаучы булган } k \text{ төркем}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nk \text{ тапкырлаучы}} = a^{nk}.$$

§ 18. БЕР ҮК КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘЛӘРНЕ ТАПКЫРЛАУ ҺӘМ БҮЛҮ

Узган параграфта без бер үк нигезле дәрәҗәләрне тапкырлау һәм бүлүне тикшердек. Нигезләре төрле булган дәрәҗәләрне дә, әгәр аларның күрсәткечләре бер үк булса, тапкырларга һәм бүләргә мөмкин икән.

1 нче мисал. Исәпләргә $2^4 \cdot 5^4$.

Чишү. Билгеле булганча, 16 нчы параграфтагы таблица буенча $2^4 = 16$, $5^4 = 625$ икәнен белергә һәм 16 ны 625 кә тапкырларга мөмкин. Әмма башкача эшләү күпкә отышлырак:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$

$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000.$$ ▣

Чишү барышында без санлы тигезлек таптык:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4.$$

Нәкъ шундый юл белән $a^3b^3 = (ab)^3$ икәнен исбатларга мөмкин.

Чынлап та,

$$a^3b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3.$$

Гомумән алганда, $a^nb^n = (ab)^n$ тигезлеге урынлы.

Кызыксынуы көчлерәк булганнарга бу расламаның «сүзсез» исбатланышын китерәбез. Аңа «тавыш» бирергә һәм аңлатырга тырышыгыз:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ тапкырлаучы}} = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b =$$

$$= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ тапкырлаучы}} = (ab)^n.$$

2 нче мисал. Исәпләргә: $\frac{12^6}{4^6}$.

Чишү. Исәпләүләрне турыдан-туры — башта 12^6 нең кыйммәтен, аннан соң 4^6 кыйммәтен исәпләп, беренче санны икенчесенә бүлеп эшләргә була. Әмма болай фикерләү отышлырак:

$$\frac{12^6}{4^6} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} =$$

$$= \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729.$$

Чишү барышында без $\frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6$ санлы тигезлеген алдык.

Нәкъ шул ук юл белән $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ һәм $\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$ икәнен исбатларга мөмкин. Гомуми очракта $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, әгәр $b \neq 0$ булса.

Шулай итеп,

исегездә калдырыгыз

$$a^nb^n = (ab)^n;$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \; b \neq 0.$$

Бу ике формуланы сулдан уңга таба да, уңнан сулга таба да кулланалар. Аларны дәрәҗәләр белән гамәлләрнең кагыйдәләре рәвешендә формалаштырырга да мөмкин, ул чагында 17 нче параграфтагы өч кагыйдәгә тагын икәү өстәлә:

4 нче кагыйдә. *Бер үк күрсәткечле дәрәҗәләрне тапкырлау өчен, нигезләрне тапкырлап, дәрәҗә күрсәткечен үзгәрешсез калдыру җитә.*
5 нче кагыйдә. *Бер үк күрсәткечле дәрәҗәләрне бүлү өчен, бер нигезне икенчесенә бүлеп,дәрәҗә күрсәткечен үзгәрешсез калдыру җитә.*

3 нче мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5$.

Чишү. Табабыз:

$$\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{\left(2^2a^3b^4\right)^5}{3^5} \text{ (5 нче кагыйдә);}$$

алга таба:

$$(2^2a^3b^4)^5 = (2^2)^5(a^3)^5(b^4)^5 \text{ (4 нче кагыйдә).}$$

Тик

$$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024; \quad (a^3)^5 = a^{15}; \quad (b^4)^5 = b^{20} \text{ (3 нче кагыйдә).}$$

Димәк, $(2^2a^3b^4)^5 = 1024a^{15}b^{20}$ була. $3^5 = 243$ булганлыктан,

$$\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{1024a^{15}b^{20}}{243}.$$ ■

Йомгаклап, бер кисәтү. Без инде беләбез:

нигезләр тигез булса:	*күрсәткечләр* тигез булса:
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, $a^n : a^k = a^{n-k}$ $(n > k)$;	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $a^n : b^n = (a : b)^n$ $(b \neq 0)$.

Әгәр дә тапкырлау һәм бүлү төрле нигезле һәм төрле күрсәткечле дәрәҗәләр белән башкарыла икән, игътибарлы булыгыз. Әйтик, $3^5 \cdot 2^4$ не «турыдан-туры» исәпләргә, башта 3^5, аннары 2^4 кыйммәтләрен табып, тапкырлауны эшләргә мөмкин. Ләкин болай да исәпләп була: $3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot (3 \cdot 2)^4 = 3 \cdot 6^4$.

§ 19. НУЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ

Узган параграфларда без сезнең белән теләсә нинди *натураль* күрсәткечле дәрәҗәнең кыйммәтен исәпләргә өйрәндек. Мәсәлән:

$$0{,}2^1 = 0{,}2; \quad 3^2 = 3\cdot 3 = 9; \quad 4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64;$$

$$1^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1; \quad (-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32;$$

$$0^6 = 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0 \text{ h.б.}$$

Алга таба сез әле дәрәҗә күрсәткеченең бары тик натураль сан гына булмавын белерсез. Тик әле бу югарырак сыйныфларда ачыкланыр, ә хәзер без бу юнәлештә кечкенә генә адым ясыйбыз: *нуль күрсәткечле дәрәҗә* төшенчәсен кертербез, ягъни математикада a^0 символына нинди мәгънә бирелүен ачыкларбыз. Ә бит бу символ үзеннән-үзе күзгә ташлана. Карагыз: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$, $3^8 : 3 = 3^{8-1} = 3^7$. Ни өчен $5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0$ дип язмаска?

нуль күрсәткечле дәрәҗә

Моңа кадәр бар да әйбәт барды: a^3 — a санын өч тапкыр үз-үзенә тапкырлау, a^{10} — a санын ун тапкыр үз-үзенә тапкырлау дигән сүз, a^1 — бу бары тик a иде. Ә нәрсә соң ул a^0? Чынлап та, a санын үз-үзенә 0 тапкыр тапкырлап булмый бит!

Әлеге a^0 өчен гадәти кагыйдәләр үтәлүе, мәсәлән, $a^3 \cdot a^0$ аңлатмасын исәпләгәндә күрсәткечләрнең кушылуы: $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0}$ булуы кирәк тоела. Тик $3 + 0 = 3$. Нәрсә килеп чыга соң? $a^3 \cdot a^0 = a^3$ килеп чыга. Димәк, $a^0 = a^3 : a^3 = 1$ (бу очракта табигый чикләмә, $a \neq 0$ икәнен кертергә кирәк). Шулай фикер йөртү түбәндәге билгеләмәгә китереп җиткерә.

Билгеләмә. Әгәр $a \neq 0$ булса, $a^0 = 1$ була.

Мәсәлән, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $(2^n)^0 = 1$ h.б. Тик шунысын онытмагыз: математикада 0^0 символының мәгънәсе юк дип кабул ителгән.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Биредә без сезнең белән 15–19 нчы параграфларда өйрәнгән төп билгеләмәләр, үзлекләр, теоремалар, формулалар, кагыйдәләр тупланды. Алар барысы да коры математика телендә, аңлатмаларсыз язылган, чөнки аңлатмалар күрсәтелгән параграфларда китерелде.

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ тапкырлаучы}};$$

$$a^0 = 1, \text{ биредә } a \neq 0;$$

$$1^n = 1; \qquad 0^n = 0;$$

$$(-1)^{2n} = 1; \qquad (-1)^{2n-1} = -1;$$

$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ нуль}};$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^{n+k+m} = a^n \cdot a^k \cdot a^m;$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ биредә } n \geqslant k;$$

$$(a^n)^k = a^{nk};$$

$$a^n b^n = (ab)^n; \qquad (abc)^n = a^n b^n c^n; \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ биредә } b \neq 0.$$

Бу формулаларны белү — теләсә нинди алгебраик аңлатмалар белән уңышлы эшләү ачкычы. Әлеге эшкә без акрынлап, алдагы параграфтан башлап керешәбез.

5 БҮЛЕК
БЕРБУЫННАР. БЕРБУЫННАР БЕЛӘН АРИФМЕТИК ГАМӘЛЛӘР

§ 20. *Бербуын төшенчәсе. Бербуынның стандарт рәвеше*
§ 21. *Бербуыннарны кушу һәм алу*
§ 22. *Бербуыннарны тапкырлау. Бербуынны натураль дәрәҗәгә күтәрү*
§ 23. *Бербуынны бербуынга бүлү*

§20. БЕРБУЫН ТӨШЕНЧӘСЕ. БЕРБУЫННЫҢ СТАНДАРТ РӘВЕШЕ

Билгеләмә. Натураль күрсәткечле дәрәҗәгә күтәрелгән саннар һәм үзгәрешлеләрнең тапкырчыгышын тәшкил иткән алгебраик аңлатма **бербуын** дип атала.

Бербуыннарга мисал:

$$2ab; \quad \frac{1}{3}a^2xy^3; \quad (-2)xy^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 x^3ab^4; \quad 1{,}7a^nb^n \ (n \in N).$$

Аерым алганда, барлык саннар, теләсә нинди үзгәрешлеләр, үзгәрешлеләрнең дәрәҗәләре бербуыннарга керә. Мәсәлән, бербуыннар:

$$0; \quad 2; \quad -0{,}6; \quad x; \quad a; \quad b; \quad x^2; \quad a^3; \quad b^n \ (n \in N).$$

Хәзер бербуын булмаган алгебраик аңлатмаларга мисаллар китерәбез:

$$a + b; \qquad 2x^2 - 3y^3 + 5; \qquad \frac{a^2}{b}.$$

игътибар итегез

Ә сез ничек уйлыйсыз, $\frac{2ab}{3}$ бербуынмы, әллә түгелме? Формасы белән ул бербуыннарга кертелмәгән $\frac{a^2}{b}$ аңлатмасына охшаган һәм вакланма сызыгы белән язылган. Ә шулай да $\frac{2ab}{3}$ — бербуын:

$$\frac{2ab}{3} = \frac{2}{3}ab.$$

Менә тагын капма-каршылы ике мисал: $\frac{a}{3}$ һәм $\frac{3}{a}$. Сез ничек уйлыйсыз, боларның кайсы бербуын, ә кайсы юк? Ә хәзер тикшерегез: $\frac{a}{3}$ — бербуын, аны $\frac{1}{3}a$ рәвешендә язарга мөмкин; $\frac{3}{a}$ исә бербуын түгел. Математикада атамаларны дөрес кулланырга кирәк.

$3a \cdot \frac{2}{3}a^2bc$ бербуынын тикшерик. Бу аңлатмага карап, математик, гадәттә, болай фикер йөртә: «Тапкырлаучыларның урынын алыштырудан тапкырчыгыш үзгәрми, бу аңлатманы уңайлырак рәвешкә китерик әле:

$$\left(3 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot (a \cdot a^2)bc.$$

Ул чагында мин $2a^3bc$ ны табам, ә бу язылыш беренчесеннән кыскарак булуы белән генә дә матуррак. Шуның өстенә анда әле беренче язылыштагы таркаулык та юк: беренче тапкырлаучы — сан, икенчесе — a үзгәрешлесе, аннан соң тагын сан, аннан шул ук a үзгәрешлесе, тик инде квадратта һ.б.».

Тәртипкә, кыскалык һәм төгәллеккә омтылучы математик чынлап та бербуынны *стандарт рәвешкә* китерде.

Гомумән, *бербуынны стандарт рәвешкә китерү өчен:*

1) *барлык санлы тапкырлаучыларны тапкырлап чыгарга һәм тапкырчыгышны беренче урынга куярга;*

2) *нигезләре бер үк хәрефле дәрәҗәләрне тапкырлап чыгарга;*

3) *нигезләре башка хәрефле дәрәҗәләрне тапкырлап чыгарга кирәк һ.б.*

Стандарт рәвештә язылган бербуынның санлы тапкырлаучысы **бербуынның коэффициенты** дип атала.

Теләсә кайсы бербуынны стандарт рәвешкә китерергә мөмкин.

бербуын

бербуынның стандарт рәвеше

бербуынның коэффициенты

Мисал. Бербуынны стандарт рәвешкә китерергә һәм бербуынның коэффициентын атарга:

а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5$;

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c$;

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz$;

г) $\frac{3ab}{10}$.

Чишү. а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5 = 3 \cdot (-2)x^2xyy^2zz^5 = -6x^3y^3z^6$.

Бербуынның коэффициенты -6 га тигез.

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c = 4 \cdot \frac{1}{4}ab^2(c \cdot c) = 1 \cdot ab^2c^2 = ab^2c^2$.

Бербуынның коэффициенты 1 гә тигез, гадәттә мондый коэффициентны язмыйлар, әмма күздә тоталар.

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz = (-2) \cdot \frac{1}{2}aax^2x^5y^3yz^nz = -a^2x^7y^4z^{n+1}$.

Бербуынның коэффициенты -1 гә тигез.

г) Ә бусы «бәләкәй провокация» булып чыкты: бербуынны стандарт рәвешкә китерәсе юк, ул болай да стандарт рәвештә язылган: $\frac{3}{10}ab$. Бербуынның коэффициенты 0,3 кә тигез.

§ 21. БЕРБУЫННАРНЫ КУШУ ҺӘМ АЛУ

Бу бүлектә без сезнең өчен яңа математик объектлар — бербуыннарны өйрәнәбез. Образлы итеп әйтсәк, әгәр саннар, үзгәрешлеләр һәм үзгәрешлеләрнең дәрәҗәләре математика теле өчен хәрефләр булып исәпләнсә, бербуыннар — иҗекләр дигән сүз. Бала вакытта укырга өйрәнгәндә, башта хәрефләрне танырга, аннан соң гына язылган сүзне тулысы белән әйтә башладыгыз; хәрефләр, иҗекләр, сүзләр, җөмләләр —

телне өйрәнү этаплары ул. Һәм монда инде сезгә бербуыннарны аерым өйрәнү ошыймы, әллә юкмы — бу мөһим түгел, берни эшләр хәл юк — әгәр математика телен иркен үзләштерергә телибез икән, аларны ныклап өйрәнмәү мөмкин түгел.

20 нче параграфта без бербуын һәм бербуынның стандарт рәвеше төшенчәләрен керттек. Димәк, бербуыннар белән эш итәргә өйрәнергә, мәсәлән, алар белән арифметик гамәлләр үтәргә өйрәнергә кирәк. Тик башта ук бары стандарт рәвешкә китерелгән бербуыннар белән генә эш итү турында килешик.

Билгеләмә. Һәрберсе ике бербуынга да бер үк дәрәҗәдә кергән (ягъни дәрәҗә күрсәткечләре тигез булган) бер үк үзгәрешлеләрдән торучы ике бербуынны **охшаш бербуыннар** дип атыйлар.

охшаш бербуыннар

Охшаш бербуыннарга мисаллар:

$$2a \text{ һәм } 5a,\ 3ab^2c \text{ һәм } -\frac{2}{7}ab^2c,\ x^n \text{ һәм } 5x^n.$$

Күргәнегезчә, охшаш бербуыннар бер-берсеннән бары тик коэффициентлары белән генә аерылалар (хәтта коэффициентлар тигез дә булырга мөмкин, мәсәлән, $7ab$ һәм $7ab$ — охшаш бербуыннар).

Ә менә охшаш булмаган буыннарга мисаллар:

$$5a \text{ һәм } 3a^2,\ 2x \text{ һәм } 7y,\ 3a^2b^2 \text{ һәм } 6a^2b.$$

«Охшаш» гадәти сөйләмдә кулланыла торган «ошаганнар» сүзе белән мәгънәдәш. Чынлап та, $5a^2b$ һәм $23a^2b$ бербуыннары бер-берсенә ошаганнар (охшаш бербуыннар).

Ике охшаш бербуынның суммасы: $5a^2b + 23a^2b$ ны карыйк. *Яңа үзгәрешле кертү алымын* кулланабыз: $a^2b = c$ дип алабыз. Ул вакытта $5a^2b + 23a^2b$ суммасын $5c + 23c$ дип язарга мөмкин. Бу сумма $28c$ га тигез. Димәк, $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$.

яңа үзгәрешле кертү алымы

Бу рәвешүзгәртүнең мәгънәсе нидә соң? Мәгънәсе шул, $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$ тигезлеге үзгәрешлеләрнең теләсә нинди кыйммәтләрен куйганда да дөрес була.

Охшаш бербуыннарны кушуны башкарып чыктык; бу бик җиңел булып чыкты: коэффициентларны кушу, ә хәрефле

өлешне үзгәрешсез калдыру җитә икән. Охшаш бербуыннарны алу да шулай ук эшләнә. Мәсәлән,

$$7abc^3 - 9abc^3 = (7 - 9)abc^3 = -2abc^3.$$

Ә бербуыннар охшаш булмаса нишләргә, аларны кушарга, алырга ярыймы? Юк шул, хәзергә ярамый! Без бу сорауга соңрак, 6 нчы бүлектә әйләнеп кайтырбыз.

Хәзер бербуыннарны кушу һәм алу алгоритмын формалаштырып карарбыз (гадәттә, «кушу» атамасын гына калдыралар, ә минус тамгасын коэффициентка карап кулланалар).

Бербуыннарны кушу алгоритмы

1. Бербуыннарны стандарт рәвешкә китерергә.
2. Барлык бербуыннарның да охшаш булуына ышанырга, әгәр алар охшаш түгел икән, алгоритм алга таба дәвам итми.
3. Охшаш бербуыннарның коэффициентлары суммасын табарга.
4. Җавапны язарга: өченче адымда табылган коэффициент белән бирелгәннәргә охшаш бербуын.

1 нче мисал. Аңлатманы гадиләштерергә:

$$2a^2b - 7a \cdot 0{,}5ba + 3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a).$$

Чишү. Сүз бербуыннарны кушу турында бара, димәк, алгоритм нигезендә эшлибез.

1) Беренче бербуын инде стандарт рәвештә. Икенче бербуын өчен эшлибез:

$$7a \cdot 0{,}5ba = -(7 \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3{,}5a^2b \text{ —}$$

бу стандарт рәвеш.

Өченче бербуынны стандарт рәвешкә китерәбез:

$$3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a) = 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3a^2b.$$

2) Өч бербуын: $2a^2b$, $-3{,}5a^2b$, $-3a^2b$ ны таптык. Алар охшаш, шуңа күрә алар белән эшне дәвам итәргә, ягъни алгоритмның өченче адымына күчәргә була.

3) Табылган өч бербуынның коэффициентлары: $2 - 3{,}5 - 3 = -4{,}5$.

4) Җавап язабыз: $-4{,}5a^2b$. ■

2 нче мисал. $27ab^2$ бербуынын бербуыннар суммасы рәвешендә язарга.

Чишү. Бу очракта, алдарак тикшерелгән мисаллардан аермалы буларак, чишелеш бердәнбер түгел. (Ә тормышта сезгә барлык очракларда да бердәнбер карар кабул итәргә туры киләме? Кайвакыт берничә чишелеш була, ә кайчак берсе дә булмый.) Болай язарга мөмкин:

$$27ab^2 = 20ab^2 + 7ab^2,$$

һәм бу дөрес булачак. Болай итеп язсак:

$$27ab^2 = 15ab^2 + 12ab^2,$$

бусы да дөрес. Ә менә болай:

$$27ab^2 = ab^2 + 26ab^2$$

һәм хәтта болай:

$$27ab^2 = 100ab^2 - 73ab^2$$

язып, дөрес чишелеш табабыз. Тагын бик күп чишелешләрне күрсәтергә мөмкин. Иң мөһиме, кушылучы охшаш бербуыннарның коэффициентлар суммасы 27 гә тигез булырга тиеш.

Тагын шунысы бар: ике бербуын суммасы төзү мәҗбүри түгел (шартта бу турыда әйтелмәгән). Димәк, мәсәлән, мондый чишелеш бар дип тә әйтергә була: $27ab^2 = 20ab^2 + 4ab^2 + 3ab^2$.

Яки мондый: $27ab^2 = 2ab^2 + 8ab^2 + 22ab^2 - 5ab^2$. ■

Хәзер үзегез 2 нче мисалның берничә чишелешен уйлап карагыз.

Без «Бербуыннарны кушу һәм алу» темасын өйрәнүне тәгәллибез. Ә сез нидер әйтелеп бетмәгәнне, мөгаен, сизәсездер. Моннан соң әллә нинди бербуыннар белән эшләргә туры киләчәк, бәлки алар арасында **охшаш булмаганнар** да табылыр? Әгәр реаль ситуациянең математик моделен төзегәндә охшаш булмаган бербуыннар суммасы рәвешендәге аңлатма килеп чыкса, мәсәлән, $2ab + 3a - 5b$ кебек? Математиклар бу хәлдән чыгу юлын тапканнар, андый сумманы *күпбуын* дип атаганнар, ягъни яңа төшенчә кертеннәр һәм күпбуыннар белән гамәлләр эшләргә өйрәнгәннәр. Тик бу хакта сүз әле алда, 6 нчы бүлектә.

Бу параграфның ахырында конкрет мәсьәләне карап үтәрбез, аны чишү барышында бербуыннарны кушарга туры киләчәк.

Ул безгә тагын бер тапкыр математикада бернәрсәнең дә юкка гына өйрәнелмәвен, анда нәрсә өйрәнелсә, шуның тормышта кулланылуын күрсәтә.

3 нче мисал. Турист A пунктыннан B пунктына кадәр 2 сәг җәяү бара, B да тизлеге җәяүле турист тизлегеннән 4 тапкыр артык булган катерга утыра һәм анда C пунктына кадәр 1,5 сәг бара. C да тизлеге катер тизлегеннән 2 тапкыр артык булган автобуска утыра һәм аның белән D пунктына кадәр бара. Әгәр A дан D га кадәр ераклык 120 км булса, турист автобуста нинди тизлек белән барган?

Чишү.

Беренче этап. *Математика моделен төзү.*

x км/ч — җәяүленең тизлеге булсын. Ул 2 сәг тә $2x$ км уза.

Шарт буенча, катерның тизлеге $4x$ км/сәг 1,5 сәг тә катер $4x \cdot 1{,}5$ км, ягъни $6x$ км юл үтә.

Шарт буенча, автобусның тизлеге $2 \cdot 4x$ км/сәг, ягъни $8x$ км/сәг. Автобус 2 сәг тә $8x \cdot 2$ км, ягъни $16x$ км юл үтә.

A дан D га кадәр барлык юл $2x + 6x + 16x$ ка тигез, шарт буенча, ул 120 км. Шулай итеп,

$$2x + 6x + 16x = 120.$$

Бу — мәсьәләнең математик моделе.

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эш.*

$2x$, $6x$, $16x$ бербуыннарын кушып $24x$ ны табабыз. Димәк, $24x = 120$, моннан $x = 5$.

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Без x дип җәяүленең тизлеген билгеләдек, ул 5 км/сәг кә тигез. Катерның тизлеге аннан 4 тапкыр артык, ягъни 20 км/сәг, ә автобус тизлеге 2 тапкыр артык, ягъни 40 км/сәг.

Җавап: автобусның тизлеге 40 км/сәг.

§ 22. БЕРБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУ. БЕРБУЫННЫ НАТУРАЛЬ ДӘРӘҖӘГӘ КҮТӘРҮ

Без 21 нче параграфта бербуыннарны кушу һәм алуны тикшердек. Бу операцияләрне бары охшаш бербуыннар белән генә эшләп була икән. Ә бербуыннарны тапкырлау ничегрәк эшләнер? Бик гади итеп: әгәр ике бербуын арасына тапкырлау

билгесе куйсак, тагын бербуын килеп чыга; аны бары стандарт рәвештә генә китерәсе кала (без моны 20 нче параграфтагы мисалда инде эшләгән идек). Бербуынны дәрәҗәгә күтәрү дә артык кыенлык тудырмый. Бу вакытта дәрәҗәләр белән гамәлләр эшләү кагыйдәләре куланыла (18 нче параграфтагы 3 нче мисалда без бербуынны дәрәҗәгә күтәрдек инде).

1 нче мисал. Өч бербуынның тапкырчыгышын табарга: $2a^2bc^5$, $\frac{3}{4}a^3cx^3$ һәм a^2b.

Чишү.

$$(2a^2bc^5)\cdot\left(\frac{3}{4}a^3cx^3\right)\cdot(a^2b)=\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)(a^2a^3a^2)\,(b\cdot b)\,(c^5c)x^3=1{,}5a^7b^2c^6x^3.$$ ▣

2 нче мисал. Аңлатманы гадиләштерергә: $(-2a^2bc^3)^5$ (ягъни бербуын рәвешендә күрсәтергә).

Чишү. $(-2a^2bc^3)^5=-2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5=-32a^{10}b^5c^{15}$.

Беренчедән, без тапкырчыгышны дәрәҗәгә күтәргәндә һәр тапкырлаучыны шушы дәрәҗәгә күтәрергә кирәк дигәннән чыктык. Шуңа күрә $2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5$ килеп чыкты.

Икенчедән, $(-2)^5=-2^5$ тән файдаландык.

Өченчедән, дәрәҗәне дәрәҗәгә күтәргәндә, күрсәткечләр тапкырлана дигәннән файдаландык. Шуңа күрә $(a^2)^5$ урынына — a^{10}, ә $(c^3)^5$ урынына c^{15} дип яздык. ▣

3 нче мисал. $36a^2b^4c^5$ бербуынын бербуыннар суммасы рәвешендә күрсәтергә.

Чишү. Биредә, 21 нче параграфтан 2 нче мисалдагы кебек, чишелеш бердәнбер түгел. Менә берничә вариант:

$$36a^2b^4c^5=(18a^2)\cdot(2b^4c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(36abc)\cdot(ab^3c^4);$$
$$36a^2b^4c^5=(-3b^4)\cdot(-12a^2c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(2a^2)\cdot(3bc)\cdot(6b^3c^4).$$ ▣

Хәзер үзегез 3 нче мисалның берничә чишелешен уйлап табыгыз.

4 нче мисал. Бирелгән A бербуынын B^n рәвешендә күрсәтергә (биредә B — бербуын):

а) $A=32a^5$, $n=5$; г) $A=-27a^3b^9$, $n=3$;

б) $A = a^3b^6$, $n = 3$; д) $A = 16a^8b^5$, $n = 4$.

в) $A = 49a^2b^4c^6$, $n = 2$;

Чишү.

а) $32a^5 = 2^5a^5 = (2a)^5$. Димәк, $A = B^5$, биредә $B = 2a$.

б) $a^3b^6 = a^3(b^2)^3 = (ab^2)^3$. Димәк, $A = B^3$, биредә $B = ab^2$.

в) $49a^2b^4c^6 = 7^2a^2(b^2)^2(c^3)^2 = (7ab^2c^3)^2$ булганлыктан, $A = B^2$, биредә $B = 7ab^2c^3$.

г) $-27a^3b^9 = (-3)^3a^3(b^3)^3 = (-3ab^3)^3$ булганлыктан, $A = B^3$, биредә $B = -3ab^3$.

д) $16a^8b^5$ бербуыны белән бернәрсә дә килеп чыкмый. Ни өчен? Уйлап карыйк. Әгәр b^5 тапкырлаучысы булмаса, мәсьәлә җиңел чишелер иде: $16a^8 = 2^4(a^2)^4 = (2a^2)^4$; әгәр b^5 урынына, мәсәлән, b^{12} тапкырлаучысы булса, без мисалны болай чишәр идек:

$$16a^8b^{12} = 2^4(a^2)^4(b^3)^4 = (2a^2b^3)^4.$$

Әмма b^5 тапкырлаучысын $(b^k)^4$ (биредә k — натураль сан) рәвешендә күрсәтеп булмый; бу тапкырлаучы «бөтен эшне бозып тора». Димәк, $16a^8b^5$ бербуынын B^4 (B — ниндидер бербуын) рәвешендә язып булмый.

Бу мисал математикада һәр мәсьәләнең чишелеше бар дип әйтергә ярамаганны күрсәтә (тормыштагы кебек үк).

Хәер, әгәр математикка чишелеше юклыгы ачык күренеп торган мәсьәлә бирсәләр, ул «Бу мәсьәлә төгәл куелмаган» диячәк. Төгәл куелмаган мәсьәләне тәкъдим итүче гафу үтенергә тиеш. Менә автор да 4д) мисалы өчен гафу үтенә. Тик мисалның барыбер бераз файдасы булды.

игътибар итегез

Сүзне төгәл куелган һәм төгәл куелмаган мәсьәләләр турында башлаганбыз икән, тагын берничә шундый мисал китерик, ә сез ни өчен мәсьәләнең төгәл куелган яки төгәл куелмаган икәнен аңларга тырышыгыз.

Төгәл куелган мәсьәләләр:

1. Гадиләштерергә: $2ab^2 \cdot (3ab)^3$.
2. Гадиләштерергә: $7ab + 8ab + ab$.
3. Исәпләргә $\dfrac{2{,}7 + 3{,}8}{2 - 6}$.

4. $13a^4b^5$ бербуынын бербуыннар суммасы рәвешендә күрсәтергә.

5. $48x^3y^5z$ бербуынын бербуыннар тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә.

6. $A = 25a^4$ бербуынын ниндидер B бербуыны квадраты рәвешендә күрсәтергә.

Төгәл куелмаган мәсьәләләр:

1. Бербуыннарны кушарга: $3ab^2$, $5ab^2$ и $7a^2b$.

2. Исәпләргә: $\frac{2,7 + 3,8}{6 - 6}$.

3. Әгәр $A = -25a^4$ булса, A бербуынын ниндидер B бербуынының квадраты рәвешендә күрсәтергә.

4. $y = -3x + 1$ һәм $y = -3x + 5$ турыларының кисешү ноктасын табарга (§10, 1б) мисалы).

§ 23. БЕРБУЫННЫ БЕРБУЫНГА БҮЛҮ

Без инде бербуынның нәрсә икәнен белдек; бербуыннарны ничек итеп кушарга, алырга, тапкырларга һәм хәтта дәрәҗәгә күтәрергә кирәклеге турында сөйләштек. Әмма тагын бер арифметик гамәл — бүлү — тапкырлауның кире гамәле бар бит әле. Бербуынны бербуынга бүлү гамәле һәрвакыт үтәлә, өлештә бербуын килеп чыга дип ышанып әйтә алабызмы? Шул турыда сөйләшик.

1 нче мисал. Арифметик гамәлләрнең үзлекләренә таянып, бербуыннарны бүлүне эшләп карыйк:

а) $10a : 2$; в) $36a^3b^5 : (4ab^2)$; д) $4x^3 : (2xy)$;

б) $18ab : (3a)$; г) $\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z)$; е) $a^2 : a^5$.

Чишү. а) Ике санның тапкырчыгышын өченче санга бүлү өчен, тапкырлаучыларның берсен бу тапкырлаучыга бүлеп, килеп чыккан өлешне икенче тапкырлаучыга тапкырларга мөмкин дигәннән файдаланабыз. (Искә төшердегезме? Мәсәлән, $(12 \cdot 4) : 3 = (12 : 3) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$.) Табабыз:

$$10a : 2 = (10 : 2) \cdot a = 5a.$$

б) а) мисалындагы кебек фикерләп табабыз:

$$18ab : (3a) = (18 : 3) \cdot (a : a)b = 6 \cdot 1 \cdot b = 6b.$$

в) $36a^3b^5 : (4ab^2) = (36 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b^5 : b^2) = 9a^{3-1} \cdot b^{5-2} = 9a^2b^3.$

Кайвакыт бүлү тамгасы (:) урынына вакланма сызыгын куллану уңайрак. Бу очракта в) мисалын чишү болай языла:

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

г) Биредә чишелешнең катнаш язылышын, ягъни бүлү тамгасын да, вакланма сызыгын да кулланабыз:

$$\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z) = \left(\frac{4}{7} : (-2)\right) \cdot \frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} =$$

$$= -\frac{4}{7 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{2}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{7}.$$

Барысы да дөрес, әмма математиклар әйткәнчә, *рациональ эшләнмәде*, чөнки башта ук $x^3y^2z : x^3y^2z = 1$ икәне ачык иде (аңлатма үз-үзенә бүленә иде).

игътибар итегез

д) $4x^3 : (2xy) = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$

Бу бербуын түгел, димәк, $4x^3$ не $2xy$ ка бүләргә ярамый (өлештә бербуын килеп чыкмый дигән мәгънәдә).

е) Бу мәсьәлә дә үтәлә алмый, чөнки без хәзергә нигезләре бер үк булганда кечерәк күрсәткечле дәрәҗәне зуррак күрсәткечле дәрәҗәгә бүлә белмибез.

Без карап узган алты мисалның дүртесе төгәл куелган, ә икесе (соңгылары) төгәл куелмаган (бу атаманы 22 нче параграфта керттек) иде.

Хәзер чишелгән мисалларны анализлыйк һәм бербуынны бербуынга, өлештә дә бербуын килеп чыгарлык итеп, кайчан бүләргә яраганын ачыкларга тырышыйк.

Билгеле, ике бербуын да (бүленүче дә, бүлүче дә) нульгә тигез булмаган коэффициентлар белән стандарт рәвештә язылса (бу турыда без әле 21 нче параграфта ук сөйләштек), уңайрак була.

Беренче күзәту. Бүлүчедә бүленүчедә булмаган үзгәрешлеләр булмаска тиеш (шул сәбәпле без 1д) мисалында «абындык».

Икенче күзәтү. Әгәр бүлүчедә дә, бүленүчедә дә бер үк үзгәрешле булып, бүленүчедә ул n нчы дәрәҗәгә, ә бүлүчедә k нчы дәрәҗәгә күтәрелгән икән, k саны n саныннан зур булырга тиеш түгел (шуңа күрә 1е) мисалында «абындык»).

Өченче күзәтү. Бүленүченең һәм бүлүченең коэффициентлары теләсә нинди булырга мөмкиннәр (чөнки без нульгә бүлүдән башка теләсә нинди саннарны бер-берсенә бүлә беләбез).

игътибар итегез

Димәк, сезгә бербуынны бербуынга бүлүне тәкъдим итәләр икән, башта мәсьәләнең төгәл куелышына ышаныгыз, күрсәтелгән күзәтүләрне үткәреп, барысы да дөрес икәнен белегез. Мәсьәлә төгәл куелган очракта аны 1 нче мисал үрнәгендә чишегез.

2 нче мисал. Гадиләштерегез: $48a^4b^5c^6d : (36ab^3c^6)$.

Чишү. 1) Ике бербуын да (бүленүче һәм бүлүче) стандарт рәвештә язылган.

2) Бүленүчедә — a, b, c, d үзгәрешлеләре, бүлүчедә a, b, c үзгәрешлеләр бар. Бүлүчедә артык үзгәрешлеләр юк.

3) Бүлүчедә дәрәҗәләр бүленүчедәге бер исемдәге үзгәрешлеләр дәрәҗәсеннән зуррак түгел.

Нәтиҗә: Мәсьәлә төгәл куелган, аны чишәбез.

Табабыз:

$$\frac{48a^4b^5c^6d}{36ab^3c^6} = \frac{48}{36} \cdot \frac{a^4}{a} \cdot \frac{b^5}{b^3} \cdot \frac{c^6}{c^6} \cdot d = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot 1 \cdot d = \frac{4}{3}a^3b^2d.$$

алдарак белерсез

Сез сизәсезме, бу параграфта да, 21 нче параграфтагы кебек, әйтеп бетермәү бар. Бербуын бербуынга бүленмәсә, нәрсә эшләргә кирәк соң? Мондый хәлләр булмый калмаячак бит? Шуңа күрә математикада яңа объект — *алгебраик вакланма* кертелгән. Исегезгә төшерегез, гади вакланмалар натураль саннар күплегендә бүлүнең һәрвакытта да үтәлеп бетмәвеннән килеп чыккан иде: мәсәлән, 14 саны 7 гә бүленә, ә 13 исә 7 гә бүленми. Икенче очракта, 13 не 7 гә бүлү мәҗбүри булганда җавап ничек языла? Ул гади вакланма, $\frac{13}{7}$ рәвешендә язылды. Алгебраик вакланма безгә алдарак, 1д) мисалында очраган иде: $\frac{2x^2}{y}$ аңлатмасы табылды. Билгеле инде,

математиклар бу яңа объектлар — алгебраик вакланмалар белән эш итәргә өйрәнгәннәр. Без аларны 8 нче сыйныфның алгебра курсында өйрәнербез, ә 35 нче параграфта аларны тагын бер очратабыз әле.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә өйрәнелгән иң мөһим нәрсәләрне санап чыгабыз, ә сез анда язылганнарның барысын да беләсезме, башка кешегә моны аңлатып бирә аласызмы икән, тикшереп карагыз.

Шулай итеп, сез 5 нче параграфта өйрәнергә тиешле иң мөһим белемнәр:

бербуын төшенчәсе;
бербуынны стандарт рәвештә язу;
бербуынның коэффициенты төшенчәсе;
охшаш бербуыннар төшенчәсе;
кайсы бербуыннарны кушарга (алырга) мөмкин, ниндиләрен мөмкин түгел;
охшаш бербуыннарны ничек кушарга (алырга) мөмкин;
ничек итеп бербуынны охшаш бербуыннар суммасы рәвешендә күрсәтергә;
бербуыннарны ничек тапкырларга;
бербуынны ничек натураль дәрәҗәгә күтәрергә;
кайсы очракта бер бербуынны икенчесенә бүләргә мөмкин, һәм аны ничек эшләргә.

6 БҮЛЕК КҮПБУЫННАР. КҮПБУЫННАР БЕЛӘН АРИФМЕТИК ОПЕРАЦИЯЛӘР

§ 24. *Төп төшенчәләр*
§ 25. *Күпбуыннарны кушу һәм алу*
§ 26. *Күпбуынны бербуынга тапкырлау*
§ 27. *Күпбуынны күпбуынга тапкырлау*
§ 28. *Кыскача тапкырлау формулалары*
§ 29. *Күпбуынны бербуынга бүлү*

§ 24. ТӨП ТӨШЕНЧӘЛӘР

5 нче бүлектә без теләсә нинди бербуыннарны кушу һәм алуның мөмкин түгеллеген, охшаш бербуыннарны гына кушарга ярağанын карап үттек; шулай ук реаль мәсьәләнең охшаш булмаган бербуыннар суммасыннан торучы математик модельгә китерү мөмкинлеген дә билгеләдек. Математикада шундый суммаларны өйрәнү өчен күпбуын төшенчәсе кертелгән.

Билгеләмә. Бербуыннар суммасын **күпбуын** дип атыйлар.

Күпбуыннарга мисаллар:

$2a + b$; $\quad 5a^2b - 3ab^2 - 3ab^2 + 7c$; $\quad x^5 + x^4 + x^2 - 2$.

Билгеле, күпбуын булмаган алгебраик аңлатмалар да була. Мәсәлән, $\frac{x}{y}$, $2x^2 + 5y - \frac{2}{y}$.

Күпбуынны төзегән кушылучылар (бербуыннар) **күпбуынның буыннары** дип атала: алар икәү икән — **икебуын** бирелгән (мәсәлән, $2a + b$ — икебуын), әгәр өч буын икән — **өчбуын** бирелгән, диләр (мәсәлән, $5a^2 - 2cb^2 + 7c$ — өчбуын). Бу җә-

сүзлекчә

һәттән караганда, «бербуын» атамасы һәм, гадәттә, аның — күпбуынның аерым очрагы дип аталуы, аңлашыла төшә.

күпбуын

күпбуынның буыннары

икебуын

өчбуын

Искәрмә. Сөйләүләргә караганда, Африкада «бер», «ике», «өч», «күп» дип санаучы кабилә бар икән. Күпбуыннарга карата безнең атамалар да шул кабиләнең терминологиясен хәтерләтә: бербуын, икебуын, өчбуын, күпбуын (гадәттә, «дүртбуын» дип тә, «бишбуын» дип тә әйтмиләр).

Хәзер җитди төшенчәне кабул итәргә әзерләник.

Күпбуын бирелгән булсын:

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2.$$

Моның күпбуын булуына шик юк (чөнки бербуыннар суммасы язылган), тик менә сезгә бу язылыш ошыймы? Юктыр, мөгаен. Ни өчен?

Беренчедән, $2ab^2 \cdot 3a^2b$ бербуыны стандарт рәвештә язылмаган, ә безнең белүебезчә, стандарт рәвеш — бербуынның иң уңайлы язылышы. Аны стандарт рәвешкә китереп, $6a^3b^3$ ны язабыз.

Нәкъ шулай ук итеп күпбуынның тагын бер буыны, $-\frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a$ ны стандарт рәвешкә китерәбез: $-2a^3b^3$.

Хәзер бирелгән күпбуынның язылышы матуррак төс алды:

$$6a^3b^3 - 5a - 7a + 3b^2 - 2a^3b^3 - 2b^2.$$

Икенчедән, кушылучыларның урынын алыштырудан сумма үзгәрми, охшаш бербуыннарны рәттән язарга һәм аннан кушарга мөмкин.

Табабыз:

$$(6a^3b^3 - 2a^3b^3) + (-5a - 7a) + (3b^2 - 2b^2) = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Дөрес, гадәттә, күпбуында охшаш буыннарның урыннарын алыштырмыйлар, бертөрле итеп аларның астына сызалар һәм аннан кушалар:

$$\underline{6a^3b^3} - \underline{\underline{5a}} - \underline{\underline{7a}} + \underline{\underline{\underline{3b^2}}} - \underline{2a^3b^3} - \underline{\underline{\underline{2b^2}}} = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Бу эшне **охшаш буыннарны берләштерү** дип атыйлар.

Әгәр күпбуында барлык буыннар стандарт рәвешкә китерелгән һәм охшаш буыннар берләштерелгән булса, күпбуын **стандарт рәвешкә** китерелгән (яки стандарт рәвештә язылган), диләр.

Хәзер сез $4a^3b^3 - 12a + b^2$ язылышының башлангыч язылыштан: $2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2$ ни өчен өстенрәк икәнен аңлыйсыздыр инде?

охшаш буыннарны берләштерү

күпбуынның стандарт рәвеше

Эш шунда ки: беренче язылыш — күпбуынның стандарт рәвеше түгел, ә $4a^3b^3 - 12a + b^2$ — стандарт рәвеше.

Теләсә кайсы күпбуынны стандарт рәвешкә китерергә мөмкин. Киләчәктә эшне һәрвакыт шуннан башларга килешик, күпбуыннар белән гамәлләр эшләү өчен шулай уңайрак.

Гадәттә, күпбуынны p яки P хәрефе белән билгелиләр — грек сүз *polys* («күпле», «күпсанлы»; математикада күпбуыннарны әле *полиномнар* дип тә атыйлар) шул хәрефтән башлана. Билгеләнешкә шулай ук күпбуын буыннарын төзүче үзгәрешлеләрне дә кертәләр. Мәсәлән, $2x^2 - 5x + 3$ күпбуынын $p(x)$ дип билгелиләр һәм «пэ икс» дип укыйлар; $2x^2 + 3xy - y^4$ күпбуынын $p(x;\ y)$ дип билгелиләр һәм «пэ икс, игрек» дип укыйлар һ.б.

Мисал. Күпбуын бирелгән:

$p(x;\ y) = 2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2$.

а) аны стандарт рәвештә язарга;

б) исәпләргә: $p(1;\ 2)$; $p(-1;\ 1)$; $p(0;\ 1)$.

Чишү.

а) $2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2 =$

$= \underline{6x^2y^2} - \underline{\underline{14x^4}} - \underline{\underline{3x^4}} + 2y^4 + \underline{5x^2y^2} - 8xy^3 =$

$= 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3$ —

күпбуынның стандарт рәвеше.

б) $p(1;\ 2)$ язылышы $x = 1$, $y = 2$ булганда $p(x;\ y)$ күпбуынының кыйммәтен табарга кирәк дигәнне аңлата. Исәпләүләрне стандарт рәвештә язылган $p(x;\ y) = 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3$ күпбуыны өчен эшләрбез.

Табабыз:

$$p(1;\ 2) = 11 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 17 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 1 \cdot 2^3 =$$
$$= 44 - 17 + 32 - 64 = -5.$$

Шулай итеп, $p(1;\ 2) = -5$.

Шул ук юл белән

$$p(-1;\ 1) = 11 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot (-1) \cdot 1^3 =$$
$$= 11 - 17 + 2 + 8 = 4,$$

ягъни $p(-1;\ 1) = 4$.

Ниһаять,

$$p(0;\ 1) = 11 \cdot 0^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot 0^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 0 \cdot 1^3 =$$
$$= 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Шулай итеп, $p(0;\ 1) = 2$.

§ 25. КҮПБУЫННАРНЫ КУШУ ҺӘМ АЛУ

Узган параграфта без күпбуын һәм күпбуынның стандарт рәвеше төшенчәләрен керттек. Сез хәзер, мөгаен, яңа төшенчә кертелүгә үк, аның белән эшли белергә кирәклеген аңлый башлагансыздыр. Аерым алганда, күпбуыннар белән арифметик операцияләр эшләргә өйрәнербез.

Кушу һәм алудан башлыйбыз. Болар бик гади операцияләр: берничә күпбуынны кушу өчен, аларны җәяләргә алып, җәяләр арасына «+» тамгасын куеп язалар, җәяләрне ачалар һәм охшаш буыннарны берләштерәләр. Бер күпбуыннан икенчесен алганда, аларны шулай ук җәяләр эченә алалар һәм киметүче алдына «−» тамгасын куялар, җәяләрне ачалар һәм охшаш буыннарны берләштерәләр.

1 нче мисал. Күпбуыннарны кушарга:

а) $p_1(c) = 2x^2 + 3x - 8,\ \ p_2(x) = 5x + 2;$

б) $p_1(a;\ b) = a^2 + 2ab - b^2,\ \ p_2(a;\ b) = 2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5,$ $p_3(a;\ b) = a^2 - ab - b^2 - 4.$

Чишү. а) Күпбуыннарның суммасын $p(x)$ дип билгелибез. Ул чагында:

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) =$$
$$= (2x^2 + 3x - 8) + (5x + 2) = 2x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 =$$
$$= 2x^2 + (3x + 5x) + (-8 + 2) = 2x^2 + 8x - 6.$$

б) Күпбуыннар суммасын $p(a;\ b)$ дип билгелибез. Ул чагында

$$p(a;\ b) = p_1(a;\ b) + p_2(a;\ b) + p_3(a;\ b) =$$
$$= (a^2 + 2ab - b^2) + (2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5) + (a^2 - ab - b^2 - 4) =$$
$$= \underline{a^2} + \underline{2ab} - \underline{b^2} + 2a^3 - \underline{a^2} + \underline{3ab} - \underline{b^2} + \underline{5} + \underline{a^2} - \underline{ab} - \underline{b^2} - 4 =$$
$$= a^2 + 4ab - 3b^2 + 2a^3 + 1.$$

2 нче мисал. Күпбуыннарның аермасын табарга:

$$p_1(x;\ y) = x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5 \text{ һәм}$$
$$p_2(x;\ y) = x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7.$$

Чишү. Күпбуыннарның аермасын $p(x;\ y)$ дип билгелибез. Ул чагында:

$$p(x;\ y) = p_1(x;\ y) - p_2(x;\ y) =$$
$$= (x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5) - (x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7) =$$
$$= \underline{x^3} + \underline{y^3} + 2x + \underline{3y} + \underline{5} - \underline{x^3} + \underline{y^3} + 5x - \underline{3y} + \underline{7} = 2y^3 + 7x + 12.$$

игътибар итегез

Игътибар итегез: $x^3 - x^3 = 0$ һәм $3y - 3y = 0$. Шуңа күрә x^3 бербуыны һәм $3y$ бербуыны ике күпбуыннан да «юкка чыкты». Мондый очракларда x^3 һәм $-x^3$, $3y$ һәм $-3y$ *үзара бетерештеләр*, диләр (дөрес, укучылар бу очракта «кыскарыштылар» дип әйтергә яраталар, әмма алай дию дөрес түгел: математикада «кыскарту» атамасын вакланмаларга карата куллану кабул ителгән. Мәсәлән, $\frac{15}{20}$ вакланмасын кыскартырга мөмкин, һәм бу очракта $\frac{3}{4}$ табыла).

Шунысын искәртик: күпбуыннарны кушу һәм алу бер үк кагыйдә буенча үтәлә, ягъни кушу һәм алу операцияләрен аерып күрсәтүнең кирәге юк, димәк, «күпбуыннарны кушу» һәм «күпбуыннарны алу» дигән ике атаманы куллануның да зарурлыгы юк. Алар урынына *күпбуыннарның алгебраик суммасы* терминын кулланырга мөмкин. Өч күпбуын — $p_1(x)$, $p_2(x)$ һәм $p_3(x)$ ның алгебраик суммаларына берничә мисал карагыз:

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) - p_3(x);$$
$$p_2(x) - p_3(x) + p_1(x).$$

Хәзер без, бу параграфта сөйләнгәннәргә йомгак ясап, күпбуыннарның алгебраик суммасын төзү кагыйдәсен әйтә алабыз.

Кагыйдә 1. *Берничә күпбуынның алгебраик суммасын стандарт рәвештәге күпбуын рәвешендә язу өчен җәяләрне ачарга һәм охшаш буыннарны берләштерергә кирәк. Әгәр җәя алдында «+» тамгасы торса, җәяләрне ачканда, кушылучылар алдындагы тамгаларны үзгәрешсез калдырырга кирәк. Әгәр инде җәя алдында «−» тамгасы торса, җәяләрне ачкан вакытта, кушылучыларның җәя эчендәге тамгаларын капма-каршысына үзгәртергә кирәк: «+» не «−» ка, «−» ны «+» кә.*

Ә хәзер 1 һәм 2 нче мисалларга әйләнеп кайтыгыз һәм аларның чишелешен әлеге кагыйдәгә нигезләнеп аңлатыгыз (үзегез өчен генә булса да). Булдымы?

3 нче мисал. Өч күпбуын бирелгән:

$p_1(x) = 2x^2 + x - 3;\quad p_2(x) = x^2 - 3x + 1;\quad p_3(x) = 5x^2 - 2x - 8.$

Алгебраик сумманы табарга:

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_3(x).$$

Чишү.

$$p(x) = (2x^2 + x - 3) + (x^2 - 3x + 1) - (5x^2 - 2x - 8) =$$
$$= 2x^2 + x - 3 + x^2 - 3x + 1 - 5x^2 + 2x + 8 = -2x^2 + 6.$$

§ 26. КҮПБУЫННЫ БЕРБУЫНГА ТАПКЫРЛАУ

Сез, мөгаен, инде искәрткәнсездер, әлегә кадәр 6 нчы бүлек нәкъ 5 нче бүлекнең планы буенча төзелде. Ике бүлектә дә башта төп төшенчәләр кертелде: 5 нче бүлектә болар — бербуын, бербуынның стандарт рәвеше, бербуынның коэффициенты; 6 нчы бүлектә — күпбуын, күпбуынның стандарт рәвеше. Аннан соң 5 нче бүлектә без бербуыннарны кушу һәм алуны тикшердек; 6 нчы бүлектә шулай ук күпбуыннарны кушу һәм алу каралды.

5 нче бүлектә аннан соң нәрсә иде? Аннан соң бербуыннарны тапкырлау турында сөйләштек. Димәк, шуңа охшатып, хәзер безгә күпбуыннарны тапкырлау турында сөйләшергә кирәк. Тик

биредә ашыгырга ярамый: башта (бу параграфта) күпбуынны бербуынга (яки бербуынны күпбуынга, барыбер) тапкырлауны тикшерик, ә аннан соң (моннан соңгы параграфта) — теләсә нинди күпбуыннарны тапкырлау каралыр. Түбән сыйныфларда саннарны тапкырлауны да шулай акрынлап өйрәндегез: башта күбурынлы санны берурынлы санга тапкырладыгыз һәм шуннан соң гына күбурынлы санны күбурынлыга тапкырладыгыз.

Эшкә керешәбез. Күпбуынны бербуынга тапкырлаганда, тапкырлауның тарату законы кулланыла: $(a + b)c = ac + bc$.

1 нче мисал. Тапкырлауны эшләргә: $(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a)$.

Чишү. Яңа үзгәрешләр кертәбез:

$$x = 2a^2,\ y = -3ab,\ z = -5a.$$

Ул чагында бирелгән тапкырчыгыш $(x+y)z$ рәвешендә языла һәм тарату законы буенча $xz + yz$ ка тигез. Хәзер элекке үзгәрешләргә күчәбез:

$$xz + yz = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a).$$

Хәзер безгә бербуыннар тапкырчыгышын гына табасы кала. Исәплибез:

$$-10a^3 + 15a^2b.$$

Чишүнең кыска язылышын үтибез (киләчәктә дә, яңа билгесезләр кертеп тормыйча, шулай язабыз):

$$(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a) = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a) =$$
$$= -10a^3 + 15a^2b.$$

Хәзер без күпбуынны бербуынга тапкырлауның тиңдәшле кагыйдәсен әйтә алабыз.

Кагыйдә 2. *Күпбуынны бербуынга тапкырлау өчен, күпбуынның һәр буынын бу бербуынга тапкырларга һәм табылган тапкырчыгышларны кушарга кирәк.*

Бербуынны күпбуынга тапкырлаганда да шушы ук кагыйдә үз көчендә кала:

$$-5a(2a^2 - 3ab) = (-5a) \cdot 2a^2 + (-5a) \cdot (-3ab) = -10a^3 + 15a^2b$$

(без 1 нче мисалны алдык, әмма тапкырлаучыларның урыннарын алыштырдык).

2 нче мисал. Бирелгән күпбуынны күпбуынның бербуынга тапкырчыгышы рәвешендә язарга:

а) $2x^2y + 4x$; б) $x^2 + 3y^2$.

Чишү. а) $2x^2y = 2x \cdot xy$, ә $4x = 2x \cdot 2$ икәнен искәртик. Димәк,

$$2x^2y + 4x = xy \cdot 2x + 2 \cdot 2x = (xy + 2) \cdot 2x.$$

б) а) мисалында безгә $2x^2y + 4x$ күпбуынының һәр буыны составында бертөрле кисәкне (бер үк тапкырлаучы), $2x$ ны аерып чыгарырга мөмкин булды. Икенче очракта мондый уртак өлеш юк. Димәк, $x^2 + 3y^2$ күпбуынын күпбуынның бербуынга тапкырчыгышы рәвешендә язып булмый.

Чынлыкта исә $x^2 + 3y^2$ күпбуынын тапкырчыгыш рәвешендә күрсәтергә мөмкин. Мәсәлән,

$$x^2 + 3y^2 = (2x^2 + 6y^2) \cdot 0{,}5$$

яки болай:

$$x^2 + 3y^2 = (x^2 + 3y^2) \cdot 1 \text{ —}$$

санның күпбуынга тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтеп була, тик бу ясалма рәвешүзгәртү, бик нык кирәк булмаганда кулланылмый.

алдарак белерсез

Кыскасы, бирелгән күпбуынны бербуынның күпбуынга тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтү таләбе математикада шактый еш очрый, шуңа күрә бу процедурага *уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару* дигән махсус исем бирелгән. Уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгарырга дигән бирем төгәл куелган (2а мисалындагы кебек) һәм бик үк төгәл куелмаган (2б мисалы) булырга мөмкин. Киләсе параграфта без бу сорауны махсус карыйбыз.

Параграф ахырында мәсьәләләр чишәрбез. Алар реаль ситуацияләрнең математик модельләре белән эшләгәндә күпбуыннарның алгебраик суммасын төзергә дә, күпбуынны бербуынга тапкырларга да туры килгәнен күрсәтә. Шулай булгач, бу операцияләрне без юкка гына өйрәнмибез икән.

3 нче мисал. A, B һәм C пунктлары шоссе буйлап 52 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә урнашканнар. A һәм B арасындагы ераклык 16 км га тигез. B дан C га таба җәяүле юлга чыга. Аннан соң 2 сәг узгач, A дан C га таба тизлеге җәяүле тизлегеннән 6 км/сәг кә артыграк булган велосипедчы кузгала.

Рәс. 52

Юлга чыгып 4 сәг барганнан соң, ул җәяүлене C пунктында куып җитә. B һәм C арасындагы ераклык нәрсәгә тигез?

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

Әйтик, x км/сәг — җәяүленең тизлеге булсын, ул вакытта $(x + 6)$ км/сәг — велосипедчының тизлеге.

A һәм C арасын велосипедчы 4 сәг тә үтә, димәк, бу ара $4(x + 6)$ км формуласы белән табыла. Димәк, $AC = 4(x + 6)$.

B һәм C арасын җәяүле 6 сәг тә үтә (ул велосипедчыдан 2 сәг элек кузгалган иде), димәк, бу ара $6x$ формуласы белән табыла. Димәк, $BC = 6x$.

Ә хәзер 52 нче рәсемгә игътибар итегез: $AC - BC = AB$. Ягъни $AC - BC = 16$. Бу — мәсьәләнең математик моделен төзү өчен нигез. Исегезгә төшерегез, $AC = 4(x + 6)$, $BC = 6x$; димәк,

$$4(x + 6) - 6x = 16.$$

Икенче этап. *Төзелгән модель белән эшләү.*

Тигезләмәне чишү өчен, беренчедән, 4 бербуынын $x + 6$ икебуынына тапкырларга кирәк, $4x + 24$ не табабыз. Икенчедән, $4x + 24$ икебуыныннан $6x$ ны алырга кирәк:

$$4x + 24 - 6x = 24 - 2x.$$

Бу рәвешүзгәртүләрдән соң тигезләмә гадирәк рәвешкә килә:

$$24 - 2x = 16.$$

Моннан соң:

$$-2x = 16 - 24;$$
$$-2x = -8;$$
$$x = 4.$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Без $x = 4$ не таптык, димәк, җәяүленең тизлеге 4 км/сәг. Әммә безгә моны түгел, ә B дан C га кадәр ераклыкны табарга кирәк. Без $BC = 6x$ дигән идек, димәк, $BC = 6 \cdot 4 = 24$.

Җавап: B белән C арасы 24 км.

4 нче мисал. Көймә елганың агымы уңаена 3 сәг. 12 минут, ә аннан соң агымга каршы 1,5 сәг йөзә. Әгәр елганың агым тизлеге 2 км/сәг, ә көймәнең барысы 41 км юл үткәне билгеле булса, аның үз тизлеген (ягъни акмый торган судагы тизлеген) табарга.

Чишү.

Беренче этап. *Математик модель төзү.*

x км/сәг — көймәнең үз тизлеге булсын, ул чагында көймә агым уңаена $(x + 2)$ км/сәг тизлек (агым булыша), ә агымга каршы $(x - 2)$ км/сәг тизлек (агым каршылык күрсәтә) белән йөзә.

Агым уңаена көймә 3 сәг 12 минут йөзә. Тизлек сәгатькә километр итеп бирелгәнлектән, бу вакытны сәгатьләрдә күрсәтергә кирәк: 12 мин $= \frac{12}{60}$ сәг $= \frac{1}{5}$ сәг $= 0{,}2$ сәг. Димәк, 3 сәг 12 мин $=$ 3,2 сәг. Шушы вакыт эчендә көймә $(x + 2)$ км/сәг тизлек белән $3{,}2(x + 2)$ км юл үтә.

Агымга каршы көймә 1,5 сәг йөзә. Бу вакыт эчендә ул $(x - 2)$ км/сәг тизлек белән $1{,}5(x - 2)$ км юл үтә.

Шарт буенча, аның барлык үткән юлы 41 км га тигез, бу юл агым уңаена һәм агымга каршы барган юллардан тора:

$$3{,}2(x + 2) + 1{,}5(x - 2) = 41.$$

Бу тигезләмә — мәсьәләнең математик моделе.

Икенче этап. *Математик модель белән эшләү.*

Һәрвакыттагы кебек, бу этапта модельне — тигезләмәне ничек чишү турында гына уйлыйбыз, аның кайдан килеп чыгуы безне кызыксындырмый.

Тигезләмәнең сул ягында 3,2 бербуынын — $x + 2$ икебуынына, 1,5 бербуынын $x - 2$ икебуынына тапкырлыйбыз, ә аннан соң килеп чыккан күпбуыннарны (икебуыннарны) кушабыз:

$$3{,}2x + 6{,}4 + 1{,}5x - 3 = 41;$$

$$4{,}7x + 3{,}4 = 41;$$

$$4{,}7x = 41 - 3{,}4;$$

$$4{,}7x = 37{,}6;$$

$$x = \frac{37{,}6}{4{,}7}, \text{ ягъни } x = 8.$$

Өченче этап. *Мәсьәләнең соравына җавап.*

Көймәнең үз тизлеге, ягъни x ның ничәгә тигез икәнлеге соралган иде. Бу сорауга җавап алынды да: $x = 8$.

Җавап: көймәнең үз тизлеге 8 км/сәг.

§ 27. КҮПБУЫННЫ КҮПБУЫНГА ТАПКЫРЛАУ

Күпбуынны бербуынга тапкырлау кагыйдәсен үзләштергәннән соң, икенче адымны ясау — теләсә нинди ике күпбуынны тапкырлау кагыйдәсен табу кыен түгел. Башта иң гади (бербуыннардан соң) күпбуыннарны, дөресрәге, $a + b$ һәм $c + d$ икебуыннарын тапкырлауны тикшерик.

Шулай итеп, $(a + b)(c + d)$ тапкырчыгышында җәяләрне ачарга кирәк. Яңа $m = c + d$ үзгәрешлесен кертеп табабыз:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)m = am + bm.$$

Баштагы үзгәрешлеләргә күчәбез:

$$am + bm = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Шулай итеп,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Шундый ук юл белән табарга мөмкин:

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy.$$

(Моны үзегез дә эшләп карагыз.) Икебуынны икебуынга тапкырлаган кебек, беренче күпбуынның һәр буынын икенче күпбуынның һәр буынына чиратлап тапкырлап чыгарга һәм табылган тапкырчыгышларны кушарга кирәк.

исегездә калдырыгыз

Кагыйдә 3. *Күпбуынны күпбуынга тапкырлау өчен, бер күпбуынның һәр буынын икенче күпбуынның һәр буынына чиратлап тапкырлап чыгарга һәм табылган тапкырчыгышларны кушарга кирәк.*

Күпбуыннарны тапкырлау нәтиҗәсендә һәрвакыт күпбуын табыла, аны стандарт рәвешкә китерәсе генә кала.

Мисал. Күпбуыннарны тапкырларга:

$$p_1(x) = 2x^2 - 5x + 1 \text{ һәм } p_2(x) = 3x - 4.$$

Чишү.

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x - 4) =$$
$$= 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-4) + (-5x) \cdot 3x +$$
$$+ (-5x) \cdot (-4) + 1 \cdot 3x + 1 \cdot (-4) =$$
$$= 6x^3 - 8x^2 - 15x^2 + 20x + 3x - 4 = 6x^3 - 23x^2 + 23x - 4.$$

игътибар итегез

Җәяләрне ачудан соң килеп чыккан бербуыннарның коэффициентлары тамгасына аеруча игътибар итәргә кирәк: әгәр бер күпбуында — m буын, ә икенчесендә n буын бар икән, тапкырчыгышта (охшаш буыннарны берләштергәнче) mn буын булырга тиеш; әгәр аларның саны mn түгел икән, сез нәрсәнедер югалткансыз, тикшереп карагыз. Әйтик, алдагы мисалда без өчбуынны икебуынга тапкырладык, алты кушылучының суммасы килеп чыкты (ә охшаш буыннарны берләштергәннән соң дүрт кушылучы калды).

§ 28. КЫСКАЧА ТАПКЫРЛАУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Шундый берничә очрак бар, аларда бер күпбуынны икенчесенә тапкырлау кыска, җиңел истә калдыра торган нәтиҗәгә китерә. Бу очракларда бер күпбуынны икенчесенә тапкырлап торуга караганда әзер нәтиҗәдән файдалану күпкә уңайрак була. Әлеге очракларны карап үтик.

1. Сумманың квадраты һәм аерманың квадраты

Икебуын $a + b$ ны үз-үзенә тапкырлыйбыз, $(a + b)(a + b)$ тапкырчыгышында, ягъни $(a + b)^2$ аңлатмасында җәяләрне ачабыз:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Шул ук юл белән табабыз:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

исегездә калдырыгыз

Димәк,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (1)$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (2)$$

Гадәти телдә (1) формуланы болай укыйлар: ***ике аңлатма суммасының квадраты аларның квадратлары суммасы плюс икеләтелгән тапкырчыгышына тигез.***

(2) формуласын болай укыйлар: ***ике аңлатма аермасының квадраты аларның квадратлары суммасы минус икеләтелгән тапкырчыгышына тигез.***

сумманың квадраты

аерманың квадраты

Бу формулаларга махсус исемнәр бирелгән: (1) формуласы — **сумманың квадраты**, ә (2) формуласы — **аерманың квадраты.**

1 нче мисал. Аңлатмада җәяләрне ачарга:

а) $(3x + 2)^2$; б) $(5a^2 - 4b^3)^2$.

Чишү. а) (1) формуланы кулланабыз: a ролендә — $3x$, ә b ролендә — 2 саны. Табабыз:

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

б) (2) формуланы кулланабыз, биредә a ролендә — $5a^2$, ә b ролендә — $4b^3$. Табабыз:

$$(5a^2 - 4b^3)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = 25a^4 - 40a^2b^3 + 16b^6.$$

Сумма яки аерманың квадраты формулаларын кулланганда истә тотыгыз:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2;$$
$$(b - a)^2 = (a - b)^2.$$

Бу $(-a)^2 = a^2$ булганлыктан шулай килеп чыга.

(1) һәм (2) формулаларына кайбер математик фокуслар да нигезләнгән, алар исәпләүләрне телдән эшләү мөмкинлеге бирәләр. Мәсәлән, 1, 2, 8 һәм 9 га беткән саннарны телдән диярлек квадратка күтәрергә мөмкин. Менә карагыз:

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$
$$91^2 = (90 + 1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281;$$
$$69^2 = (70 - 1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761;$$
$$102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 =$$
$$= 10000 + 400 + 4 = 10404;$$
$$48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304.$$

Шулай да иң кызыклы фокус 5 цифрына тәмамланган саннарны квадратка күтәрү белән бәйләнгән. Моның өчен 85^2 аңлатмасын исәпләп карыйк.

$$85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 =$$
$$= 80(80 + 10) + 25 = 80 \cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225.$$

85^2 кыйммәтен исәпләү өчен 8 не 9 га тапкырлап, табылган нәтиҗәнең уң ягына 25 не язып кую җиткәнен күрдек. Башка очракларда да шулай эшләнә. Мәсәлән, $35^2 = 1225$ ($3 \cdot 4 = 12$, һәм бу санның уң ягына 25 не язып куйдык); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15\,625$ ($12 \cdot 13 = 156$, һәм бу санның уң ягына 25 языла).

Әлеге фактны исбатлап карыйк.

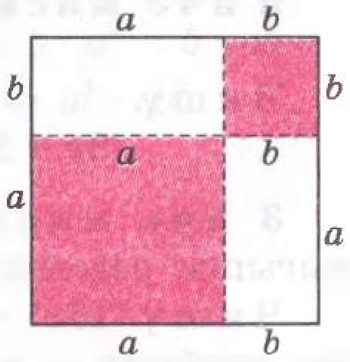
Әйтик, a саны 5 цифрына тәмамлана ди. Бу $a = 10b + 5$ дигән сүз, биредә b — a саныннан соңгы 5 цифрын алып ташлаган сан (мәсәлән, $125 = 10 \cdot 12 + 5$; биредә $b = 12$). Ул чагында

$$a^2 = (10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25 = 100b\,(b + 1) + 25.$$

Биредә b санын $b + 1$ гә тапкырларга, ул тапкырчыгышны 100 гә тапкырларга һәм аннан соң 25 не кушарга кирәк икәне күренә. Бу исә $b(b + 1)$ санының уң ягына 25 не язып куюга тиң. Мәсәлән, 125^2 санын исәпләү өчен, 12 не 13 кә тапкырлап 156 ны табабыз; уңга 25 не өстәп язабыз, 15625 килеп чыга.

Беренче карашка күңелсез тоелган (1) һәм (2) формулалары белән бәйләнгән кызыклы очраклар турында сөйләшәбез икән, бу сөйләшүне тагын бер геометрик фикерләүгә дә юнәлтик әле. Әйтик, a һәм b — уңай саннар ди. Ягы $a + b$ булган квадратның ике почмагыннан яклары тиңдәшле рәвештә a һәм b га тигез булган квадратлар кисеп алыйк (рәс. 53).

Ягы $a + b$ булган квадратның мәйданы $(a + b)^2$ була. Бу квадратны без дүрт өлешкә бүлдек: ягы a булган квадрат (аның мәйданы a^2 ка тигез), ягы b булган квадрат (аның мәйданы — b^2), яклары a һәм b булган ике турыпочмаклык (шундый һәр турыпочмаклыкның мәйданы ab га тигез). Димәк, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, ягъни (1) формуланы таптык.



Рәс. 53

2. Квадратлар аермасы

$a + b$ икебуынын $a - b$ икебуынына тапкырлыйк:

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$

Шулай итеп,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \qquad (3)$$

квадратлар аермасы

Математикада теләсә кайсы тигезләмәне сулдан уңга таба да (ягъни тигезләмәнең сул ягы аның уң ягы белән алыштырыла), уңнан сулга таба да (ягъни тигезләмәнең уң ягы аның сул ягы белән алыштырыла) кулланалар. Әгәр (3) формуланы сулдан уңга таба куллансак, ул $(a + b)$ $(a - b)$ тапкырчыгышын әзер $a^2 - b^2$ нәтиҗәсенә алыштыруга мөмкинлек бирә. Шушы ук формуланы уңнан сулга да кулланырга мөмкин, биредә ул $a^2 - b^2$ квадратлар аермасы урынына $(a + b)$ $(a - b)$ тапкырчыгышын кую мөмкинлеген бирә. Математикада (3) формуласына **квадратлар аермасы** дигән махсус атама бирелгән.

Искәрмә. «Квадратлар аермасы» һәм «аерманың квадраты» атамаларын бутамагыз. Квадратлар аермасы — ул $a^2 - b^2$, димәк, сүз (3) формуласы турында бара; аерманың квадраты — ул $(a - b)^2$, димәк, сүз (2) формула турында бара.

Гадәти телдә (3) формуланы «уңнан сулга» таба укыйлар:

ике аңлатманың квадратлар аермасы бу аңлатмалар суммасы белән аларның аермасы тапкырчыгышына тигез.

2 нче мисал. Тапкырлауны эшләргә:

$$(3x - 2y)\ (3x + 2y).$$

Чишү.

$$(3x - 2y)\ (3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2.$$

3 нче мисал. $16x^4 - 9$ икебуынын икебуыннар тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә.

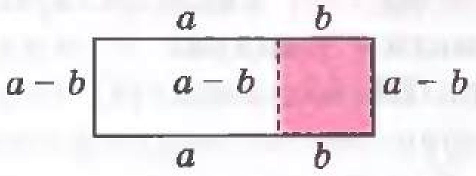
Чишү. $16x^4 = (4x^2)^2$, $9 = 3^2$ икәнен табабыз, димәк, бирелгән икебуын — квадратлар аермасы, ягъни аңа карата (3) формуланы уңнан сулга укып кулланырга була. Табабыз:

$$16x^4 - 9 = (4x^2)^2 - 3^2 = (4x^2 + 3)\ (4x^2 - 3).$$

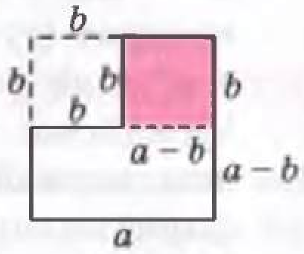
(3) формула, (1) һәм (2) формулалар кебек үк, тиз исәпләү өчен кулланыла. Карагыз:

$$79 \cdot 81 = (80 - 1)\ (80 + 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399;$$
$$42 \cdot 38 = (40 + 2)\ (40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596.$$

Квадратлар аермасы турындагы сөйләшүне кызыклы геометрик фикерләү белән тәмамлыйбыз. Әйтик, a һәм b — уңай саннар һәм $a > b$ булсын. Яклары $a + b$ һәм $a - b$ булган турыпочмаклыкны тикшерәбез (рәс. 54). Аның мәйданы $(a + b)(a - b)$ га тигез. Аннан яклары b һәм $a - b$ булган турыпочмаклык кисеп алабыз һәм, 55 нче рәсемдәге кебек, калган өлешкә тоташтырып куябыз. Килеп чыккан фигураның мәйданы элек-



Рәс. 54



Рәс. 55

кечә кала, ягъни $(a + b)(a - b)$ га тигез. Тик бу фигураны башкача да төзергә мөмкин: ягы a булган квадраттан ягы b га тигез булган квадрат кисеп алына (бу 55 нче рәсемдә күренә). Димәк, яңа фигураның мәйданы $a^2 - b^2$ була. Шулай итеп, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, ягъни (3) формуланы таптык.

3. Кублар аермасы һәм кублар суммасы

$a - b$ икебуынын $a^2 + ab + b^2$ өчбуынына тапкырлыйбыз:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a \cdot a^2 + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab -$$
$$- b \cdot b^2 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Шулай ук итеп табабыз:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

(моны үзегез тикшерегез).

Шулай итеп,

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \qquad (4)$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \qquad (5)$$

кублар аермасы

кублар суммасы

(4) формуланы гадәттә — **кублар аермасы**, (5) формуланы **кублар суммасы** дип йөртәләр (уң ягына карап).

(4) һәм (5) формулаларны гадәти телгә күчерик. Моны эшләгәнгә кадәр $a^2 + ab + b^2$ аңлат-

масының $a^2 + 2ab + b^2$ аңлатмасына охшаш икәнен искәртик, соңгысы (1) формулада катнаша һәм $(a + b)^2$ ны бирә; $a^2 - ab + b^2$ аңлатмасы $a^2 - 2ab + b^2$ ка охшаш һәм соңгысы (2) формулада $(a - b)^2$ ны бирә.

сумманың (аерманың) тулы квадраты

сумманың (аерманың) тулы булмаган квадраты

Бу аңлатмалар парларын телдән сөйләгәндә бер-берсеннән аеру өчен $a^2 + 2ab + b^2$ һәм $a^2 - 2ab + b^2$ аңлатмаларының һәркайсын **тулы квадрат** (сумманың яки аерманың) дип атыйлар, ә $a^2 + ab + b^2$ һәм $a^2 - ab + b^2$ аңлатмаларының һәркайсын **тулы булмаган квадрат** (сумманың яки аерманың) диләр. Шунлыктан (4) һәм (5) формулаларының гадәти телгә «уңнан сулга» укылган тәрҗемәләре болай укыла:

ике аңлатманың кублары аермасы бу аңлатмаларның аермасы белән алар суммасының тулы булмаган квадраты тапкырчыгышына тигез;

ике аңлатманың кублары суммасы бу аңлатмаларның суммасы белән алар аермасының тулы булмаган квадраты тапкырчыгышына тигез.

4 нче мисал. Тапкырлауны эшләргә:

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1).$$

Чишү. Беренче тапкырлаучы $2x$ һәм 1 бербуыннарының аермасы, ә икенче тапкырлаучы алар суммасының тулы булмаган квадраты икәне билгеле, шуңа күрә (4) формуланы кулланырга мөмкин. Табабыз:

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1.$$ ◼

5 нче мисал. $27a^6 + 8b^3$ икебуынын күпбуыннар тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә.

Чишү. $27a^6 = (3a^2)^3$ һәм $8b^3 = (2b)^3$. Димәк, бирелгән икебуын — кублар аермасы, шуңа күрә аңа (5) формуланы уңнан сулга таба кулланырга мөмкин:

$$27a^6 + 8b^3 = (3a^2)^3 + (2b)^3 = (3a^2 + 2b)((3a^2)^2 - 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2) =$$
$$= (3a^2 + 2b)(9a^4 - 6a^2b + 4b^2).$$ ◼

Йомгаклап, тагын бер кат ассызыклыйбыз, бу параграфта өйрәнелгән барлык (1)—(5) формулалар сулдан уңга таба да, уңнан сулга таба да кулланылалар, тик беренче очракта (сулдан уңга) — (1)—(5) *кыскача тапкырлау формулалары,* ә икенче очракта (уңнан сулга) (1)—(5) *тапкырлаучыларга таркату формулалары,* диләр.

§29. КҮПБУЫННЫ БЕРБУЫНГА БҮЛҮ

Яңадан, 26 нчы параграф башындагы кебек, 5 һәм 6 нчы бүлекләрнең төзелү планнарын чагыштырыйк. Сез инде искәрткәнсездер, бу планнар бертөрле үк диярлек, узган параграф кына (кыскача тапкырлау формулаларына багышланган) тулысы белән туры килүне бозды, шулай ук 5 нче бүлектә бербуынны дәрәҗәгә күтәрү каралган булса, 6 нчы бүлектә күпбуынны дәрәҗәгә күтәрү турында сүз булмады, бары икебуынны квадратка күтәрү очрагы гына булды. Бербуыннарны тапкырлаудан соң 5 нче бүлектә сүз бербуынны бербуынга бүлү турында барган иде. Хәзер менә 6 нчы бүлектә дә шуңа охшаш гамәл — күпбуынны бербуынга бүлү турында сөйләшербез.

Аның нигезендә сумманы санга бүлүнең түбәндәге үзлеге ята:

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m).$$

Бу исә күпбуынны бербуынга бүлү кагыйдәсен шундук әйтергә мөмкинлек бирә.

Кагыйдә 4. *Күпбуынны бербуынга бүлү өчен, күпбуынның һәр буынын бу бербуынга бүләргә һәм нәтиҗәләрне кушарга кирәк.*

23 нче параграфта без билгеләгән идек, бербуынны бербуынга һәр очракта да бүлеп булмый; бүлү үтәлерлек булсын өчен берничә шартның үтәлүе кирәк — мисаллар чишкәндә аларны искә төшерегез (яки 23 нче параграфны карагыз). Әгәр бербуынны (иң гади күпбуынны) бербуынга бүлү мәсьәләсе кайвакыт төгәл куелмаган булса, күпбуынны бербуынга бүлү турында әйтеп торасы да юк. Мондый бүлү бик сирәк кенә төгәл үтәлә.

1 нче мисал. $2a^2b + 4ab^2$ күпбуынын $2a$ бербуынына бүләргә.

Чишү.

$$(2a^2b + 4ab^2) : 2a = (2a^2b : 2a) + (4ab^2 : 2a) = \frac{2a^2b}{2a} + \frac{4ab^2}{2a} =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot b + \frac{4}{2} \cdot \frac{a}{a} \cdot b^2 = 1 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 1 \cdot b^2 = ab + 2b^2.$$

игътибар итегез

Биредә без 23 нче параграфта сөйләнелгән язылыш алымын кулландык. Ә менә икенче алым (үзегезгә кайсы күбрәк ошаганга карап, икесен дә кулланырга мөмкин): $2a^2b + 4ab^2$ күпбуынының һәр буынында нәкъ $2a$ бүлүчесенә тигез булган тапкырлаучыны аерып алабыз. Табабыз:

$$2a^2b + 4ab^2 = 2a \cdot ab + 2a \cdot 2b^2.$$

Хәзер бу сумманы $2a(ab + 2b^2)$ тапкырчыгышы рәвешендә язарга була. Әгәр бу тапкырчыгышны $2a$ га (бер тапкырлаучыга) бүлсәк, өлештә $ab + 2b^2$ (икенче тапкырлаучы) килеп чыгасы ачык күренә.

2 нче мисал. $6x^3 - 24x^2$ ны $6x^2$ ка бүләргә.

Чишү.

Беренче ысул.

$$(6x^3 - 24x^2) : 6x^2 = (6x^3 : 6x^2) - (24x^2 : 6x^2) =$$

$$= \frac{6x^3}{6x^2} - \frac{24x^2}{6x^2} = \frac{6}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} - \frac{24}{6} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 1 \cdot x - 4 \cdot 1 = x - 4.$$

Икенче ысул.

$$6x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot x - 6x^2 \cdot 4 = 6x^2(x - 4).$$

Димәк, $6x^3 - 24x^2$ ны $6x^2$ ка бүлүдән соң өлеш $x - 4$ кә тигез була.

3 нче мисал. $8a^3 + 6a^2b - b$ ны $2a^2$ ка бүләргә.

Чишү.

$$8a^3 + 6a^2b - b = 2a^2 \cdot 4a + 2a^2 \cdot 3b - b.$$

Бирелгән күпбуынның өченче буынында ($-b$ буыны турында сүз бара) $2a^2$ тапкырлаучысын аерып алып булмый, шунлыктан бүлү үтәлә алмый. Бу мәсьәлә тәгәл куелмаган. Чынлыкта без,

нәкъ 23 нче параграф ахырындагы кебек, алгебраик вакланмага $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$ га килдек.

Шулай итеп, күпбуынны бербуынга бүлү һәрвакытта да үтәлми, үтәлгән очракта да тырышлык таләп ителә. Күпбуынны күпбуынга бүлү тагын да авыррак (тагын да сирәк үтәлә торган) операция, без әлегә аны эшли алмыйбыз.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә без түбәндәге төшенчәләрне өйрәндек:
күпбуын, аерым алганда, икебуын, өчбуын;
күпбуынның охшаш буыннарын берләштерү,
буыннарның үзара бетерешүе;
күпбуынның стандарт рәвеше;
күпбуынның алгебраик суммасы.

Без түбәндәге кагыйдәләрне өйрәндек:
күпбуынның алгебраик суммаларын төзү кагыйдәсе;
күпбуынны бербуынга тапкырлау кагыйдәсе;
күпбуынны күпбуынга тапкырлау кагыйдәсе;
күпбуынны бербуынга бүлү кагыйдәсе.

Без түбәндәге формулаларны өйрәндек:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (сумманың квадраты);
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (аерманың квадраты);
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (квадратлар аермасы);
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ (кублар аермасы);
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ (кублар суммасы).

7 БҮЛЕК КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУЧЫЛАРГА ТАРКАТУ

§30. *Нәрсә ул күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркату һәм ул ни өчен кирәк*
§31. *Уртак тапкырлаучыны җәя алдына чыгару*
§32. *Группалау ысулы*
§33. *Күпбуыннарны тапкырлаучыларга кыскача тапкырлау формулаларын кулланып таркату*
§34. *Күпбуыннарны тапкырлаучыларга төрле алымнарны кулланып таркату*
§35. *Алгебраик вакланмаларны кыскарту*
§36. *Бердәйлекләр*

§30. НӘРСӘ УЛ КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУЧЫЛАРГА ТАРКАТУ ҺӘМ УЛ НИ ӨЧЕН КИРӘК

Башта үзебезгә таныш булган операцияне эшлик: $2x - 3$ күпбуынын $x + 2$ күпбуынына тапкырлыйк.

$$(2x - 3)(x + 2) = 2x \cdot x + 2x \cdot 2 - 3 \cdot x - 3 \cdot 2 =$$
$$= 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6.$$

Шулай итеп, $(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + x - 6.$

Бу тигезләмәне икенче төрле, ике якның урыннарын алыштырып та язарга мөмкин:

$$2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2).$$

сүзлекчә: күпбуынны тапкырлаучыларга таркату

Мондый язылыш $2x^2 + x - 6$ күпбуыны гадирәк $2x - 3$ һәм $x + 2$ тапкырлаучыларның тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтелгән дигәнне аңлата. Гадәттә, мондый очракларда күпбуын **тапкырлаучыларга таркатылган**, диләр.

Дөресен әйткәндә, «күпбуынны тапкырлаучыларга таркату» дигән сүз безгә инде таныш, без аны 6 нчы бүлектә берничә тапкыр кулландык, тик анда бу мәсьәләне (күпбуыннарны тапкырлаучыларга тапкырлау мәсьәләсе) соңрак җентекләп тикшерербез дигән идек. Хәзер бу вакыт җитте. Тик әлек бу эшнең — күпбуынны тапкырлаучыларга таркатуның файдалы гамәл икәнлегенә ышаныйк (югыйсә нигә өйрәнеп торырга?).

Күз алдына китерик әле, безгә $2x - 3 = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк ди. Сез моны бик җиңел башкарасыз: $2x = 3$, $x = 1{,}5$. Аннан соң $x + 2 = 0$ тигезләмәсен чишәргә кирәк булсын. Монысын да җиңел үтисез: $x = -2$. Ә менә хәзер $2x^2 + x - 6 = 0$ тигезләмәсен тәкъдим иттеләр ди. Икенче төрле әйткәндә, x нинди кыйммәтләр алганда $2x^2 + x - 6$ өчбуынын нульгә әйләнгәнен белергә кирәк, x ның бу кыйммәтләре *тигезләмәнең тамырлары* дип атала. Мондый тигезләмәләр чишүнең махсус үз кагыйдәсе дә бар, тик әле сез аны белмисез. Нишләргә?

$2x^2 + x - 6$ күпбуынын тапкырлаучыларга таркатуны алдарак карап үткән идек: $2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$. Ул чагында бирелгән тигезләмәне башкача язабыз:

$$(2x - 3)(x + 2) = 0.$$

Хәзер түбәндәге, безгә инде билгеле булган фактган файдаланабыз: әгәр ике тапкырлаучының тапкырчыгышы нульгә тигез булса, тапкырлаучыларның берсе нульгә тигез. Димәк, йә $2x - 3 = 0$, йә $x + 2 = 0$. Мәсьәлә ике гади тигезләмәне чишүгә кайтып калды. $2x - 3 = 0$ тигезләмәсеннән $x = 1{,}5$ килеп чыга. $x + 2 = 0$ тигезләмәсеннән $x = -2$. Тигезләмә чишелде, аның ике тамыры бар: 1,5 һәм −2.

Димәк, күпбуынны тапкырлаучыларга таркату безгә тигезләмәләр чишкәндә кирәк булачак икән.

Икенче ситуацияне карыйк. Санлы $\dfrac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2}$ аңлатмасының кыйммәтен табарга кирәк ди. Билгеле, «турыдан ярып» исәпләргә дә мөмкин, әмма ике тапкыр квадратлар аермасы формуласын кулланып исәпләү кулайрак булыр:

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53 - 47)(53 + 47)}{(61 - 39)(61 + 39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

Тапкырлаучыларга таркату вакланманы кыскартырга мөмкинлек бирде. Соңрак без моны алгебраик вакланмалар белән гамәлләр эшләгәндә югары бәяләячәкбез.

Шулай итеп, күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркату тигезләмәләр чишү өчен, санлы һәм алгебраик аңлатмаларны үзгәртү өчен кулланыла икән. Ул башка очракларда да кулланыла, әйтик, түбәндә авыр, әмма кызыклы мисал каралып үтәчәк, анда нәкъ менә тапкырлаучыларга таркату уңышка илтә.

Мисал. Теләсә нинди натураль n саны өчен $n^3 + 3n^2 + 2n$ аңлатмасы 6 га калдыксыз бүленә икәнен исбатларга.

Чишү. $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$ булсын.

Әгәр $n = 1$ булса, $p(1) = 1 + 3 + 2 = 6$. Димәк, $p(1)$ 6 га калдыксыз бүленә.

Әгәр $n = 2$ булса, $p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 + 12 + 4 = 24$. Димәк, $p(2)$ дә 6 га калдыксыз бүленә.

Әгәр $n = 3$ булса, $p(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 + 27 + 6 = 60$. Шунлыктан $p(3)$ тә 6 га калдыксыз бүленә.

Сез инде аңлый торгансыздыр, **барлык** натураль саннарны куеп исәпләп чыгу мөмкин хәл түгел. Нишләргә? Ярдәмгә алгебраик ысуллар килә.

Язабыз:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

Чынлап та,

$$n(n + 1) = n^2 + n,$$

ә инде

$$(n^2 + n)(n + 2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Димәк,

$$p(n) = n(n + 1)(n + 2),$$

ягъни $p(n)$ рәттән килүче өч натураль санның — n, $n + 1$, $n + 2$ нең тапкырчыгышы икән. Ләкин мондый өч санның берсе һичшиксез 3 кә бүленә, димәк, аларның тапкырчыгышы да 3 кә бүленәчәк. Моннан тыш бу саннарның кимендә берсе җөп сан була, ягъни 2 гә бүленә, димәк, тапкырчыгыш та 2 гә бүленәчәк. Шулай итеп, $p(n)$ 2 гә дә, 3 кә дә бүленә, димәк, 6 га да бүленә. ■

Ничек шәп дип уйлыйсыздыр, шулай бит? Әмма $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2)$ икәнен кайдан белергә? Җавап та ачык: күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркату ысулларын өйрәнергә кирәк. Хәзер шуңа күчәбез дә: бу бүлектәге һәр параграфта без күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркатуның теге яки бу алымын өйрәнербез.

§ 31. УРТАК ТАПКЫРЛАУЧЫНЫ ҖӘЯ АЛДЫНА ЧЫГАРУ

Бу параграф материалын өйрәнә башлаганчы, 26 нчы параграфка әйләнеп кайтыйк әле. Сез анда күпбуынны күпбуын белән бербуын тапкырчыгышы рәвешендә күрсәтергә дигән мисал чишкән идегез. Әгәр мондый тапкырчыгышны төзү мөмкин икән, гадәттә, күпбуын тапкырлаучыларга **уртак тапкырлаучыны җәя алдына чыгару** (җәя тышына чыгару дип тә әйтелә)ярдәмендә таркатылган, диләр. Берничә мисал карап үтик.

уртак тапкырлаучыны җәя алдына чыгару

1 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $2x + 6y$; в) $4a^3 + 6a^2$; д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$.

б) $a^3 + a^2$; г) $12ab^4 - 18a^2b^3c$;

Чишү. а) $2x + 6y = 2(x + 3y)$. Җәя алдына күпбуын буыннары коэффициентларының уртак бүлүчесен чыгардык.

б) $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$. Әгәр бер үк үзгәрешле күпбуынның барлык буыннарына да керсә, аны шулар арасындагы иң кечкенә дәрәҗәдә җәя алдына чыгарырга мөмкин (ягъни арада иң кечкенә күрсәткечне сайлыйлар).

в) Биредә а) һәм б) мисалларын чишкәндәге алымнарны кулланабыз: коэффициентлар өчен уртак бүлүчене табабыз (безнең очракта 2 саны), үзгәрешлеләр өчен — арада иң кечкенә дәрәҗәне (безнең очракта a^2). Табабыз:

$$4a^3 + 6a^2 = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 3 = 2a^2(2a + 3).$$

г) Гадәттә, бөтен санлы коэффициентлар өчен уртак бүлүчене түгел, ә *иң зур* уртак бүлүчене табарга тырышалар. 12 һәм 18 коэффициентлары өчен бу — 6 саны. Шуны искәртик: a үзгәрешлесе күпбуынның ике буынына да керә,

иң кечкенә күрсәткече 1 гә тигез. Үзгәрешле b да күпбуынның ике буынына да керә, ә иң кечкенә күрсәткече 3 кә тигез. Ниһаять, c үзгәрешлесе бары тик икенче буынга гына керә һәм беренче буынга керми, димәк, бу үзгәрешлене җәя алдына чыгарып булмый. Нәтиҗәдә табабыз:

$$12ab^4 - 18a^2b^3c = 6ab^3 \cdot 2b - 6ab^3 \cdot 3ac = 6ab^3(2b - 3ac).$$

д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2)$.

Бу мисалда без моннан алдагы алгоритмны кулландык.

Берничә бербуынның уртак тапкырлаучысын эзләү алгоритмы

1. Күпбуынга кергән барлык бербуыннар коэффициентларының иң зур уртак бүлүчесен табарга — ул иң зур санлы тапкырлаучы була (бу бары тик бөтен санлы коэффициентларга гына карый).
2. Күпбуынның һәр буынына кергән үзгәрешлеләрне табарга һәм аларның һәрберсе өчен араларындагы иң кечкенә дәрәҗә күрсәткечен сайлап алырга.
3. Беренче адымда табылган коэффициент белән икенче адымда тапкан дәрәҗәләрнең тапкырчыгышы уртак тапкырлаучы була, һәм аны җәя алдына чыгарырга мөмкин.

Искәрмә 1. Күп кенә очракларда уртак тапкырлаучы сыйфатында җәя алдына вакланмалы тапкырлаучыны да чыгарырга мөмкин. Мәсәлән:

$$2{,}4x + 7{,}2y = 2{,}4(x + 3y);$$

$$\frac{3}{7}a - \frac{6}{7}b + \frac{9}{7}c = \frac{3}{7}(a - 2b + 3c).$$

Искәрмә 2. Шунысын аңлагыз: алгоритмның 1 нче һәм 2 нче адымнары төрле статуска ия, ягъни тигез көчле түгел. Реаль мәсьәләләрдә коэффициентлар беркайчан да бөтен саннар булмый (мәсьәләләр җыентыкларын төзүче авторлар тырышлыгы белән мәсьәләне чишү кызыклырак булсын өчен генә шулай сайлана). Шуңа күрә 1 нче адым күзгә ташлана торган язылышлар өчен генә булса, 2 нче адымда исә алгоритмның бөтен асылы ята.

2 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатыгыз:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Чишү. Төзелгән алгоритмнан файдаланабыз.

1) −1, −2 һәм 5 коэффициентларының уртак бүлүчесе 1 гә тигез.

2) x үзгәрешлесе күпбуынның барлык буыннарына да 4, 3, 2 күрсәткечләре белән керә; димәк, җәя тышына x^2 ны чыгарырга мөмкин.

y үзгәрешлесе күпбуынның барлык буыннарына да керми; димәк, аны җәя тышына чыгарырга ярамый.

3) Нәтиҗә: җәя алдына x^2 ны чыгарырга мөмкин. Дөрес, бу очракта $-x^2$ ны чыгару отышлырак. Табабыз:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$

3 нче мисал. $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$ күпбуынын: а) $5a^3$; б) $25a^2$ бербуынына бүлү мөмкинме? Булса, бүлүне эшләргә.

Чишү. а) 1д) мисалында без тапкан идек:

$$5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2).$$

Димәк, бирелгән күпбуынны $5a^3$ ка бүләргә мөмкин, бу вакытта өлеш $a - 2 + 3a^2$ була.

б) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 25a^2\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3\right)$.

Димәк, бирелгән күпбуынны $25a^2$ ка бүләргә мөмкин, калдыкта $\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3$ була.

Моңа охшаган мисалларны без 29 нчы параграфта караган идек, аларны хәзер тагын бер кат, тик инде уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару күзлегеннән чыгып кабатлап укыгыз.

Күпбуынны уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару ярдәмендә тапкырлаучыларга таркату без 26 һәм 29 нчы параграфта өйрәнгән операцияләр, күпбуынны бербуынга тапкырлау һәм бүлү белән тыгыз бәйләнгән.

Ә хәзер уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару турындагы белемнәребезне бераз киңәйтик. Шунысы бар, кайвакыт алгебраик аңлатмада уртак тапкырлаучы сыйфатында бербуын түгел, ә берничә бербуынның суммасы бирелергә мөмкин.

4 нче мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

$$2x(x-2)+5(x-2)^2.$$

Чишү. $y = x - 2$ дигән яңа үзгәрешле кертәбез. Табабыз:

$$2x(x-2)+5(x-2)^2 = 2xy+5y^2.$$

Үзгәрешле y ны җәя тышына чыгарырга мөмкин: $2xy + 5y^2 = y(2x + 5y)$. Ә хәзер алдагы язылышка кайтабыз:

$$y(2x+5y) = (x-2)(2x+5(x-2)) =$$
$$= (x-2)(2x+5x-10) = (x-2)(7x-10).$$

Мондый очракларда, бераз тәҗрибә туплаганнан соң, яңа үзгәрешле кертеп тормаска да, түбәндәге язылышны кулланырга да була:

$$2x(x-2)+5(x-2)^2 = (x-2)(2x+5(x-2)) =$$
$$= (x-2)(2x+5x-10) = (x-2)(7x-10).$$

§ 32. ГРУППАЛАУ ЫСУЛЫ

Группалау ысулының мәгънәсен аңлау өчен түбәндәге мисалны карап үтик.

1 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$2a^2+6a+ab+3b.$$

Чишү. Беренче ике буынны — бер группага, ә соңгы ике буынны икенче группага берләштерәбез:

$$(2a^2+6a)+(ab+3b).$$

Беренче группада $2a$ ны, ә икенче группада b ны җәя тышына чыгарып булганын күрәбез, димәк, $2a(a + 3) + b(a + 3)$. Хәзер уртак $(a + 3)$ тапкырлаучысы «пәйда булды», аны җәя тышына чыгарырга мөмкин. Нәтиҗәдә табабыз $(a + 3)(2a + b)$.

Беренче мисалны чишү процессы аңлатмалар белән аралашып барганлыктан, чишүне тагын бер тапкыр аңлатмаларсыз язабыз:

$$2a^2+6a+ab+3b = (2a^2+6a)+(ab+3b) =$$
$$= 2a(a+3)+b(a+3) = (a+3)(2a+b).$$

$2a^2 + 6a + ab + 3b$ күпбуынын группаларга берләштерүне төрле алымнар белән эшләргә була. Тик шунысын истә тотарга кирәк, ниндидер группалау шуннан соңгы таркатулар өчен уңайлы булырга да, уңайсыз булырга да мөмкин. Тәҗрибә үткәрәбез. Бер

группага бирелгән күпбуынның беренче һәм өченче буыннарын берләштерик, ә икенчесенә — икенче һәм дүртенче буыннарны:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + ab) + (6a + 3b) =$$
$$= a(2a + b) + 3(2a + b) = (2a + b)(a + 3).$$

Тапкырлаучыларга тарката алдык, димәк, группалау уңайлы булып чыкты.

Хәзер бер группага беренче һәм дүртенче буыннарны, икенчесенә икенче һәм өченче буыннарны берләштерик:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + 3b) + (6a + ab) = (2a^2 + 3b) + a(6 + b).$$

Болай группалау бер дә уңышлы булмады.

Йомгаклар ясыйк. Күпбуынның буыннарын үзебез теләгәнчә группалый алабыз. Кайвакыт шундый уңышлы группалау килеп чыга, һәр группада уртак тапкырлаучыларны җәя тышына чыгарганнан соң, җәяләрдә бер үк күпбуын кала һәм аның үзен дә уртак тапкырлаучы кебек җәя тышына чыгаралар. Андый очракта күпбуынны тапкырлаучыларга таркату **группалау ысулы** белән эшләнде, диләр.

группалау ысулы

2 нче мисал. $xy - 6 + 3x - 2y$ күпбуынын тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү.

Группалауның беренче ысулы:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 6) + (3x - 2y).$$

Группалау уңышсыз килеп чыкты.

Группалауның икенче ысулы:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy + 3x) + (-6 - 2y) =$$
$$= x(y + 3) - 2(y + 3) = (y + 3)(x - 2).$$

Группалауның өченче ысулы:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 2y) + (-6 + 3x) =$$
$$= y(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(y + 3).$$

Җавап: $xy - 6 + 3x - 2y = (x - 2)(y + 3)$.

Күргәнегезчә, группалау беренче тапкырдан ук уңышлы килеп чыкмады. Әгәр группалау уңышсыз булса, аны дәвам итмәгез, икенче ысулны эзләгез. Тәҗрибә туплау нәтиҗәсендә сез уңышлы группалау ысулын тизрәк табарга өйрәнерсез.

3 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6.$$

Чишү. Өч группа төзибез: беренчесенә — беренче һәм дүртенче буыннарны, икенчесенә — икенче һәм бишенче, өченчесенә өченче һәм алтынчы буыннарны кертәбез:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (ab^2 + 2b^2) + (-2ab - 4b) + \\ + (3a + 6) = b^2(a + 2) - 2b(a + 2) + 3(a + 2).$$

Өч төркемдә дә уртак $(a + 2)$ тапкырлаучысы булып чыкты, аны җәя тышына чыгарабыз. Табыла: $(a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Җавап: $ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Кайвакыт үзегезне тикшереп карау файдалы, ягъни табылган тапкырчыгышта күпбуыннарны тапкырлау операциясен эшләргә (җәяләрне ачарга) һәм, нәтиҗәдә бирелгән күпбуын чыгамы-юкмы икәненә ышанырга кирәк. Әгәр килеп чыкмаса? Ул чагында ялгышны тапкырлаучыларга таркатудан эзлиләр.

4 нче мисал. Күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркатырга: $x^2 - 7x + 12$.

Чишү. Мөгаен, сез бу мисалның группалау ысулына нинди катнашы бар дип уйлыйсыздыр, монда нәрсәне группаларга соң? Дөрес уйлыйсыз, шулай да биредә бәләкәй генә фокус эшләп карарга мөмкин: әгәр $-7x$ кушылучысын $-3x - 4x$ суммасы рәвешендә күрсәтсәк, бирелгән күпбуындагы кебек өч кушылучы түгел, ә дүрт кушылучының суммасы килеп чыга. Бу дүрт кушылучыны ике группага тарката алабыз:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = (x^2 - 3x) + (-4x + 12) = \\ = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

5 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә:

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$.

Чишү. а) $x^2 - 7x + 12$ өчбуынын 4 нче мисалдагы кебек тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Хәзер бирелгән тигезләмәне $(x - 3)(x - 4) = 0$ рәвешендә язарга мөмкин. Беренче тигезләмәнең ике тамыры бар: $x = 3$, $x = 4$.

б) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ күпбуынын тапкырлаучыларга таркатабыз: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$.

Бирелгән тигезләмәне үзгәртеп язабыз:

$$(x - 2)(x^2 + 3) = 0.$$

Тапкырчыгыш нульгә тигез булганлыктан, тапкырлаучыларның берсе нульгә тигез. Әмма $x^2 + 3$ икебуыны x ның теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә уңай сан була, ягъни нульгә әйләнә алмый. Димәк, бары тик $x - 2 = 0$ тигезлеге генә үтәлә ала, моннан $x = 2$.

Җавап: а) 3, 4; б) 2.

§ 33. КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУЧЫЛАРГА КЫСКАЧА ТАПКЫРЛАУ ФОРМУЛАЛАРЫН КУЛЛАНЫП ТАРКАТУ

28 нче параграфта без биш кыскача тапкырлау формуласын таптык. Шунда ук бу формулаларның һәркайсын күпбуынны күпбуынга кыскача тапкырлау өчен дә (формулалардан 28 нче параграфта язылган рәвештә файдаланганда), күпбуынны тапкырлаучыларга таркату өчен дә (аларны түбәндәгечә язганда) кулланып була, дип билгеләдек:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (3)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \quad (4)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \quad (5)$$

Бу формулаларның беренчесен *квадратлар аермасын* (саннарның, бербуыннарның, күпбуыннарның — барыбер) тәшкил иткән аңлатмага карата кулланырга мөмкин, икенчесен һәм өченчесен — *кублар аермасын (суммасын)* тәшкил итүче аңлатмаларга; соңгы ике формуланы *тулы квадратны*, ягъни ике аңлатманың квадратлары һәм шул ук аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышын тәшкил итүче өчбуынга карата кулланалар.

1 нче мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $64x^2 - 9$; в) $(2x - 1)^2 - 25$;

б) $x^6 - 4a^4$; г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2$.

Чишү. Барлык дүрт мисалда да (1) формуланы (квадратлар аермасын) кулланабыз:

а) $64x^2 - 9 = (8x)^2 - 3^2 = (8x - 3)(8x + 3)$;

б) $x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$;

в) $(2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2 = ((2x - 1) - 5)((2x - 1) + 5) =$
$= (2x - 6)(2x + 4) = 2(x - 3) \cdot 2(x + 2) = 4(x - 3)(x + 2)$.

Биредә, квадратлар аермасы формуласыннан тыш, без $2x - 6$ һәм $2x + 4$ икебуыннары өчен уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару алымын да кулландык.

г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2 = ((a + 3) - (b - 2))((a + 3) + (b - 2)) =$
$= (a + 3 - b + 2)(a + 3 + b - 2) = (a - b + 5)(a + b + 1)$.

2 нче мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $125a^3 - 8b^3$; б) $a^6 + 27b^3$; в) $x^6 - a^6$.

Чишү. Биредә (2) һәм (3) формулалар (кублар суммасы һәм аермасы) буенча эшлибез.

а) $125a^3 - 8b^3 = (5a)^3 - (2b)^3 = (5a - 2b)((5a)^2 + 5a \cdot 2b + (2b)^2) =$
$= (5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2)$.

б) $a^6 + 27b^3 = (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b)((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) =$
$= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^4)$.

в) Беренче ысул:

$x^6 - a^6 = (x^2)^3 - (a^2)^3 = (x^2 - a^2)((x^2)^2 + x^2 \cdot a^2 + (a^2)^2) =$
$= (x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4)$.

Икенче ысул:

$x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2 = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) = (x - a)(x^2 + xa + a^2)(x + a)(x^2 - xa + a^2)$.

игътибар итегез

Искәрмә. 2в) мисалында чишүнең бер ысулында шундый таркату табылды:

$$(x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4),$$

ә икенче ысулында икенче төрле таркату:

$$(x - a)(x + a)(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2).$$

Чынлыкта бу бер үк әйбер: алдагы параграфта без: $x^4 + x^2a^2 + a^4$ күпбуыныннан $(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2)$ тапкырчыгышына ничек күчәргә кирәген күрсәтербез. Хәер, сез моңа хәзер үзегез дә ышана аласыз. *Моның өчен* $x^4 + x^2a^2 + a^4 = (x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2)$ тигезлегенең уң ягында җәяләрне ачу җитә (эшләп карагыз).

3 нче мисал. Тапкырлаучыларга таркатырга:

а) $a^2 - 4ab + 4b^2$; в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2$;

б) $x^4 + 2x^2 + 1$; г) $25a^2 + 10ab + 4b^2$.

Чишү. Бу мисалларда өчбуыннар бирелгән, аларны тапкырлаучыларга таркату өчен, әгәр өчбуын чынлап та тулы квадрат икәненә ышансак, (4) һәм (5) формулаларны кулланабыз.

а) $a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a - 2b)^2$.

Өчбуында бербуыннар a һәм $2b$ ның квадратлары суммасы һәм бу бербуыннарның икеләтелгән тапкырчыгышы бар. Димәк, ул тулы квадрат, төгәлрәге, аерманың квадраты.

б) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 = (x^2 + 1)^2$;

в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y = (2x^2 - 3y)^2$;

г) $25a^2 + 10ab + 4b^2 = (5a)^2 + (2b)^2 + 5a \cdot 2b$.

$10ab$ бербуыннар $5a$ һәм $2b$ ның икеләтелгән тапкырчыгышы булмаганлыктан, бирелгән өчбуын тулы квадрат була алмый. Аны (4) яки (5) формула ярдәмендә тапкырлаучыларга тарката алмыйбыз. ■

Тагын бер тапкыр ассызыклыйбыз: әгәр (4) яки (5) формуланы кулланырга телисез икән, бирелгән өчбуынның тулы квадрат булуына инаныгыз. Шулай булмаганда, (4) һәм (5) формулаларын кулланырга ярамый — 3г) мисалында нәкъ шул очрак иде.

§ 34. КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУЧЫЛАРГА ТӨРЛЕ АЛЫМНАР КУЛЛАНЫП ТАРКАТУ

Математикада мисални бер генә алымны кулланып чишү очрагы бик сирәк була, ешрак катнаш мисаллар очрый, аларда башта бер, аннары икенче һ.б. ысуллар кулланыла. Мондый мисалларны ансат кына чишү өчен ысулларны белү генә җитми, аларны ниндидер эзлеклелектә куллана белү дә кирәк. Башкача әйткәндә, биредә белем генә түгел, тәҗрибә дә сорала. Бу параграфта без менә шундый катнаш мисалларны карарбыз.

1 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5.$$

Чишү. 1) Башта уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару белән шөгыльләнербез. 36, 96, 64 коэффициентларын карыйк. Алар барысы да 4 кә бүленә, һәм ул — иң зур уртак бүлүче, аны җәя тышына чыгарабыз. Күпбуынның барлык буыннарына да a керә (беренчедә a^6, икенчедә a^4, өченчедә a^2), шуңа җәя тышына a^2 ны чыгарыйк. Шулай ук барлык буыннарга да b үзгәрешлесе керә (беренчегә b^3, икенчегә b^4, өченчедә b^5) — җәя тышына b^3 чыгарыла.

Шулай итеп, җәя тышына $4a^2b^3$ ны чыгарырга мөмкин. Ул вакытта табабыз:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

2) $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$ өчбуынын карыйк. Аның тулы квадрат түгелме икәнен ачыклыйбыз. Табабыз:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Тулы квадратның барлык шартлары үтәлә, димәк:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

3) Ике ысулны берләштереп (уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару һәм кыскача тапкырлау формуласын куллану), соңгы нәтиҗәне алабыз:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

2 нче мисал. Күпбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab.$$

Чишү. 1) Башта группалау ысулын кулланырга тырышырбыз. Әлегә кадәр дүрт кушылучыны без группаларга парлап бүлгән идек (§ 32). Монда да шулай эшләргә тырышабыз:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 - c^2) + (b^2 + 2ab) =$$
$$= (a - c)(a + c) + b(b + 2a).$$

Болай группалау уңышсыз булды, уртак тапкырлаучы юк.

Башкача эшләп карыйк:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + b^2) + (-c^2 + 2ab) —$$

монысы да уңышсыз тәмамланды.

Өченче тапкыр группалыйбыз:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab) + (-c^2 + b^2) =$$
$$= a(a + 2b) + (b - c)(b + c) \text{ —}$$

биредә дә уртак тапкырлаучы юк.

Тик барыбер бу мисалда группалау ысулы эшләргә тиеш. Кушылучыларны парлап кына төркемләргә дигән күрсәтмә юк бит, аны болай да эшләргә мөмкин:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2.$$

Хәзер сез бу күпбуынның структурасын ачык күрәсез — квадратлар аермасы.

2) Табылган аңлатмага карата квадратлар аермасы формуласын кулланабыз:

$$(a + b)^2 - c^2 = ((a + b) - c)((a + b) + c) = (a + b - c)(a + b + c).$$

Шулай итеп, ике алымны (группалау һәм кыскача тапкырлау формулаларын — сумманың квадраты һәм квадратлар аермасы) берләштереп, без соңгы нәтиҗәне таптык:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a + b - c)(a + b + c).$$

3 нче мисал. $x^4 + 4y^4$ икебуынын тапкырлаучыларга таркатырга.

Чишү. Бирелгән икебуынның структурасын анализлыйбыз. Нәрсә ул x^4? Ул $(x^2)^2$. Ә $4y^4$ нәрсә? Ул $(2y^2)^2$. Димәк, квадратлар суммасы бар: $(x^2)^2 + (2y^2)^2$. Гадәттә, ике аңлатманың (саннар, бербуыннар, күпбуыннар) квадратлары суммасын күреп, математик бу аңлатмаларның икеләтелгән тапкырчыгышын эзли башлый — тулы квадрат алырга тырыша. Бу очракта мондый икеләтелгән тапкырчыгыш $2 \cdot x^2 \cdot 2y^2$, ягъни $4x^2y^2$ була. Тик мисалда ул юк. Нәрсә эшләргә соң?

Бирелгән күпбуынга үзебезгә кирәкле буынны кушыйк, әмма, берни дә үзгәрмәс өчен, шундук алып та куйыйк:

$$(x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2.$$

Бу беренче өч буынны тулы квадрат килеп чыгарлык итеп группалау мөмкинлеген бирде. Шуннан соңгы чишелеш 2 нче мисалдагы план буенча бара.

Мисалның тулы чишелешен аңлатуларсыз гына китерәбез:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = ((x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

тулы квадрат аерып чыгару алымы

Бу мисалда без беренче тапкыр **тулы квадрат аерып чыгару** алымын кулландык. Ул безгә киләчәктә дә, аерым алганда, алдагы мисалны чишүдә дә файдалы булачак.

4 нче мисал. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$x^4 + x^2a^2 + a^4.$$

Чишү. Тулы квадрат аерып чыгару алымын кулланабыз. Моның өчен x^2a^2 ны $2x^2a^2 - x^2a^2$ рәвешендә язабыз. Табабыз:

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 - x^2a^2 + a^4 = (x^4 + 2x^2a^2 + a^4) - x^2a^2 =$$
$$= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 - xa)(x^2 + a^2 + xa).$$

Ә хәзер 33 нче параграфтагы искәрмәгә әйләнеп кайтыгыз әле (2 нче мисалдан соң). Күргәнегезчә, вәгъдәне үтәдек.

5 нче мисал. Өчбуынны тапкырлаучыларга таркатырга:

$$n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Чишү. Башта n ны җәя тышына чыгару мөмкинлегеннән файдаланабыз: $n(n^2 + 3n + 2)$. Хәзер $n^2 + 3n + 2$ өчбуынына карата группалау ысулын кулланабыз, тик алдан $3n$ ны $2n + n$ рәвешендә язабыз:

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + n + 2 = (n^2 + 2n) + (n + 2) =$$
$$= n(n + 2) + (n + 2) = (n + 2)(n + 1).$$

Шулай итеп, $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2)$.

Бу таркату инде 30 нчы параграфта файдаланылган иде. Дөрес, анда ул бернинди нигезләүләрсез эшләнде, аның каравы хәзер барысы да үз урынына басты.

6 нчы мисал. Исәпләргә: $38{,}8^2 + 83 \cdot 15{,}4 - 44{,}2^2$.

Чишү. Бер-бер артлы группалау, кыскача тапкырлау формулаларын, уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару ысулларын кулланабыз. Алгебраик алымнарның мондый кушылмасы арифметик исәпләүләрне җиңел һәм нәфис итеп үткәрү мөмкинлеген бирә:

$$38{,}8^2 + 83 \cdot 15{,}4 - 44{,}2^2 = 83 \cdot 15{,}4 - (44{,}2^2 - 38{,}8^2) =$$
$$= 83 \cdot 15{,}4 - (44{,}2 - 38{,}8)(44{,}2 + 38{,}8) = 83 \cdot 15{,}4 - 5{,}4 \cdot 83 =$$
$$= 83 \cdot (15{,}4 - 5{,}4) = 83 \cdot 10 = 830.$$

Бу параграфны тәмамлап, 7 нче бүлекнең башына әйләнеп кайтыйк. 30 нчы параграфта без тапкырлаучыларга таркату — тигезләмә чишү алымнарының берсе, дигән идек. Алдагы мисалда шушы алымны файдаланырбыз.

Башта шунысын билгеләп үтик. Математикада һәм аңа якын фәннәрдә $ax^2 + bx + c = 0$ рәвешендәге тигезләмәләр еш очрый, биредә a, b, c — үзгәрешлеләр түгел, ә саннар. Мәсәлән, $2x^2 - 3x + 2 = 0$, $x^2 + 4x - 8,5 = 0$ һ.б. Аларны *квадрат* тигезләмәләр дип атыйлар, һәм без 8 нче сыйныфта аларны махсус өйрәнәчәкбез. Тик кайбер квадрат тигезләмәләрне без инде хәзер үк чишә алабыз. Бер квадрат тигезләмәне алдарак (§32) чиштек, хәзер тагын берне һәм хәтта ике юл белән чишеп карарбыз (дөрес, гадәттә болай чишмиләр, ә квадрат тигезләмәләр чишү өчен махсус формулалардан файдаланалар — тик аларны сез әле белмисез).

7 нче мисал. Тигезләмәне чишәргә $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Чишү.

Беренче ысул. $-6x$ ны $-x - 5x$ суммасы рәвешендә күрсәтәбез һәм аннан соң группалау ысулын кулланабыз:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) =$$
$$= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5).$$

Ул чагында тигезләмә $(x - 1)(x - 5) = 0$ рәвешен ала, аннан табабыз: $x = 1$, яки $x = 5$.

Икенче ысул. Тулы квадрат аерып чыгару алымын кулланабыз, моның өчен 5 кушылучысын $9 - 4$ рәвешендә язабыз. Табабыз:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 =$$
$$= (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x - 5)(x - 1).$$

Яңадан $(x - 1)(x - 5) = 0$ тигезләмәсенә кайтып төштек. Аның тамырлары 1 һәм 5 иде.

Җавап: 1, 5.

§ 35. АЛГЕБРАИК ВАКЛАНМАЛАРНЫ КЫСКАРТУ

Математикада яңа төшенчә сирәк кенә «юктан бар була». Ул үзенең объектив кирәклеген дәлилләгәннән соң гына барлыкка килә. Нәкъ менә шулай итеп математикада тискәре саннар һәм гади вакланмалар барлыкка килгәннәр.

искә төшерегез

«Алгебраик вакланма» дигән яңа төшенчәне кертү өчен белгеләр бездә инде бар. Әйдәгез, 23 нче параграфка әйләнеп кайтыйк. Бербуынны бербуынга бүлгәндә, без берничә мисал караган идек. Шуларның икесен аерып алыйк.

1. $36a^3b^5$ бербуынын $4ab^2$ бербуынына бүләргә (1в) мисалын кара).

Без аны болай чиштек. $36a^3b^5 : 4ab^2$ язылышы урынына вакланма сызыгы кулландык: $\frac{36a^3b^5}{4ab^2}$ (чөнки $A : B$ һәм $\frac{A}{B}$ — бер үк мәгънәгә ия). Болай язу безгә $36 : 4$, $a^3 : a$, $b^5 : b^2$ язылышлары урынына да вакланма сызыгы куллану мөмкинлеге бирде, һәм мисалның чишелеше ачыграк аңлашыла төште:

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

2. $4x^3$ бербуынын $2xy$ бербуынына бүләргә (§23, 1д) мисалны кара).

Шул ук үрнәк буенча эшләп таптык:

$$4x^3 : 2xy = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$$

23 нче параграфта без $4x^3$ бербуынын $2xy$ бербуынына өлештә дә бербуын калырлык итеп бүлә алмыйбыз, дидек. Ә бит математик модельләрдә бер-берсенә бүленә торган гына түгел, теләсә нинди бербуыннар катнашкан операцияләр кирәргә мөмкин. Шуңа күрә математиклар алгебраик вакланма дип йөртелүче яңа төшенчә керткәннәр. Аерым алганда, $\frac{2x^2}{y}$ — алгебраик вакланма.

искә төшерегез

Хәзер 29 нчы параграфка әйләнеп кайтыйк. Анда күпбуынны бербуынга бүлү операциясен тикшергәннән соң, аның да һәрвакыт үтәлмәвен белгеләдек. Мәсәлән, 29 нчы параграфтагы 2 нче мисалда сүз $6x^3 - 24x^2$ икебуынын $6x^2$ бербуынына бүлү турында барды. Бу операция үтәлә торган булды, һәм нәтиҗәдә без $x - 4$ икебуынын таптык. Димәк,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4.$$

Башка сүзләр белән әйткәндә, $\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2}$ рәвешендәге алгебраик аңлатманы гадирәге белән, $x - 4$ күпбуыны белән алыштыра алдык.

Шул ук вакытта 29 нчы параграфтагы 3 нче мисалда $8a^3 + 6a^2b - b$ күпбуынын $2a^2$ ка бүлә алмадык, ягъни $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$ аңлатмасын аннан гадирәге белән алыштыра алмадык һәм аны алгебраик вакланма рәвешендә калдырырга туры килде.

Күпбуынны күпбуынга бүлү операциясенә килсәк, бары шуны гына әйтә алабыз: бер күпбуын икенчесенә икенче күпбуын беренчесенең берәр тапкырлаучысы булган очракта гына бүленеп бетә.

Мәсәлән, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Димәк, $x^3 - 1$ не $x^2 + x + 1$ гә бүләргә була, $x - 1$ килеп чыга; $x^3 - 1$ не $x - 1$ гә бүләргә мөмкин, өлештә $x^2 + x + 1$ була.

сүзлекчә

алгебраик вакланма

Алгебраик вакланма дип P һәм Q күпбуыннарының чагыштырмасын атыйлар. Һәм $\frac{P}{Q}$ язылышын кулланалар, биредә P — *алгебраик вакланманың санаучысы*, Q — *ваклаучысы*.

Алгебраик вакланмаларга мисаллар:

$$\frac{2x^2}{y}, \quad \frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}, \quad \frac{x + y}{x - y}.$$

Кайвакыт алгебраик вакланманы күпбуын белән алыштырырга мөмкин. Мәсәлән, без алдарак билгеләгәнчә,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4$$

($6x^3 - 24x^2$ күпбуынын $6x^2$ ка бүләргә мөмкин булды, өлештә $x - 4$ калды); без шулай ук билгеләдек:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1.$$

Тик болар — чагыштырмача сирәк очраклар.

Хәер, гади вакланмаларны өйрәнгәндә, шуңа охшаш хәлләр сезгә очраган иде инде. Мәсәлән, $\frac{24}{6}$ вакланмасын бөтен 4 саны белән алыштырырга мөмкин, ә $\frac{40}{8}$ вакланмасын — бөтен 5 саны белән. Ә менә $\frac{32}{24}$ вакланмасын бөтен сан белән алыштырып

булмый, шулай да бу вакланманы, санаучысын да, ваклаучысын да аларның уртак тапкырлаучысы 8 гә бүлеп, кыскартырга була: $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$. Нәкъ шулай ук *алгебраик вакланмаларны да, санаучысын да, ваклаучысын да бер үк вакытта аларның уртак тапкырлаучысына бүлеп кыскартырга мөмкин.* Ә моның өчен вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да тапкырлаучыларга таркатырга кирәк. Биредә безгә моңарчы бу бүлектә өйрәнгән белемнәребез кирәк булачак.

Мисал. Алгебраик вакланманы кыскартырга:

а) $\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5}$; б) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)}$; в) $\frac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3}$.

Чишү. а) $12x^3y^4$ һәм $8x^2y^5$ бербуыннарының уртак тапкырлаучысын табабыз; бу — $4x^2y^4$. Ул вакытта:

$$12x^3y^4 = 4x^2y^4 \cdot 3x; \quad 8x^2y^5 = 4x^2y^4 \cdot 2y.$$

Димәк,

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{4x^2y^4 \cdot 3x}{4x^2y^4 \cdot 2y} = \frac{3x}{2y}.$$

Бирелгән алгебраик вакланманың санаучысын да, ваклаучысын да уртак тапкырлаучы $4x^2y^4$ нә кыскарттык.

Бу мисалның чишелешен башкача да язып була:

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{12}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^5} = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{y} = \frac{3x}{2y}.$$

б) Вакланманы кыскарту өчен, аның санаучысын һәм ваклаучысын тапкырлаучыларга таркатабыз:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

(вакланманы уртак тапкырлаучы $a + b$ га кыскарттык).

Ә хәзер 1 нче параграфтагы 2 нче искәрмәгә кайтыйк. Күрәсезме, анда биргән вәгъдәбезне, ниһаять, үти алдык.

в) $$\frac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3} = \frac{x(x - y)}{x(x^3 - y^3)} = \frac{x(x - y)}{x(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}.$$

(вакланманы санаучы белән ваклаучының уртак тапкырлаучысына, ягъни $x(x - y)$ ка кыскарттык). ▣

Димәк, алгебраик вакланманы кыскарту өчен, иң элек аның санаучысын да, ваклаучысын да тапкырлаучыларга таркатырга кирәк (әгәр алар тәңгәл килмәсәләр). Сезнең бу яңа эштәге (алгебраик вакланмаларны кыскарту) уңышларыгыз бу бүлекнең материалын ни дәрәҗәдә әйбәт үзләштерүегезгә бәйләнгән.

§ 36. БЕРДӘЙЛЕКЛӘР

Бу параграфта без тагын бер алгебраик атама белән танышырбыз. Мәсәлән, без беләбез:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2,$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

бердәй тигез аңлатмалар

бердәй рәвешүзгәртү

Язылган тигезләмәләр алар составына кергән үзгәрешлеләрнең теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә дөрес. Алгебрада андый тигезлекләрне *бердәйлекләр* дип атыйлар. Бердәйлекнең уң һәм сул якларын үзара **бердәй тигез** (яки гади генә *бердәй*) аңлатмалар дип атыйлар. Мәсәлән, $a^2 - b^2$ һәм $(a - b)(a + b)$ — бердәй тигез аңлатмалар. Бер аңлатманы аңа бердәй тигез аңлатма белән алыштыру **бердәй рәвешүзгәртү** дип атала.

Без 4—7 нче бүлекләрдә өйрәнгән барлык нәрсә: дәрәҗәләр, бербуыннар, күпбуыннар белән гамәлләр — болар барысы да бердәй рәвешүзгәртүне өйрәнү иде.

Математикада еш кына шулай була, ниндидер атама инде кулланылып килә һәм кинәт, яңа ситуациядә ул бик үк ярашып бетми, ачыклаулар таләп итә. Бу «бердәйлек» атамасына да кагыла. Күпбуыннар белән эшләү өчен алда бирелгән билгеләмә абсолют төгәл. Ә менә алгебраик вакланмалар белән эшләү өчен бу атамага бераз төзәтмәләр кертергә туры килә.

$\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)}$ алгебраик вакланмасын карыйк. Аны санаучының һәм ваклаучының уртак тапкырлаучысы $x-1$ гә кыскартырга мөмкин. Шул рәвешле,

$$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x}{x-2}. \qquad (1)$$

тигезлеге бар.

Бу тигезлек бердәйлек була аламы? Алдарак бу атаманы керткәндә, без, бердәйлек — үзгәрешлеләрнең *теләсә нинди* кыйммәтләре өчен дә дөрес булган тигезлек ул, дидек. Тик (1) тигезлек турында моны әйтеп булмый, ул $x = 1$ һәм $x = 2$ булганда мәгънәсен югалта, ягъни x үзгәрешлесенең теләсә нинди кыйммәтләре өчен дә дөрес була алмый. Күрсәтелгән кыйммәтләр (1) тигезлеккә кергән аңлатмалар өчен мөмкин табылган кыйммәтләр түгел. Әгәр инде x үзгәрешлесенең мөмкин табылган кыйммәтләре белән генә чикләнәбез икән, мондый теләсә нинди кыйммәтләр өчен (1) тигезлеге дөрес була.

Шундый ситуацияләрне истә тотып, математиклар бердәйлек төшенчәсен төгәлрәк билгеләгәннәр.

бердәйлек

<u>*Билгеләмә.*</u> **Бердәйлек** — үз составына кергән үзгәрешлеләрнең *мөмкин табылган теләсә нинди* кыйммәтләре өчен дә дөрес тигезләмә ул.

Бу җәһәттән (1) тигезләмә — бердәйлек. «Бердәйлек» төшенчәсенә кертеләсе төзәтмә менә шул иде.

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Бу бүлектә без математика теленең яңа (сезнең өчен) <u>төшенчәләрен</u> керттек:
күпбуынны тапкырлаучыларга таркату;
алгебраик вакланма, алгебраик вакланманы кыскарту;
бердәйлек, бердәй тигез аңлатмалар, аңлатманы бердәй рәвешүзгәртү.

Сез <u>күпбуынны тапкырлаучыларга таркату</u>ның түбәндәге алымнары белән таныштыгыз:
уртак тапкырлаучыны җәя тышына чыгару;
группалау;
кыскача тапкырлау формулаларын куллану;
тулы квадрат аерып чыгару.

8 БҮЛЕК $y = x^2$ ФУНКЦИЯСЕ

§ 37. *$y = x^2$ функциясе һәм аның графигы*
§ 38. *Тигезләмәләрне график юл белән чишү*
§ 39. *Математикада $y = f(x)$ язылышы нәрсәне аңлата*

§ 37. $y = x^2$ ФУНКЦИЯСЕ ҺӘМ АНЫҢ ГРАФИГЫ

Икенче бүлектә без «сызыкча функция» атамасын керткән идек һәм аны $y = kx + m$ рәвешендәге ике үзгәрешлеле (x, y) тигезләмәгә карата кулландык. Дөрес, бу тигезләмәдәге (математик модельдәге) x, y үзгәрешлеләре тигез хокуклы булып саналмый: x — бәйсез үзгәрешле (аргумент), аңа без теләсә нинди, бернигә дә бәйләнмәгән кыйммәтләр бирдек; y — бәйле үзгәрешле, чөнки аның кыйммәтләре x үзгәрешлесенә нинди кыйммәтләр сайлаганга бәйле. Тик бу вакытта табигый сорау туа: ә менә шундый ук пландагы, әмма y үзгәрешлесе x аша $y = kx + m$ формуласы белән түгел, нинди дә булса башка юл белән күрсәтелә торган математик модельләр очрамый микән?

Җавап ачык: очрый, билгеле. Әгәр, мәсәлән, x — квадратның ягы, ә y — аның мәйданы икән, $y = x^2$ була. Әгәр x — кубның ягы, ә y — аның күләме икән, $y = x^3$. Әгәр x — турыпочмаклыкның бер ягы, аның мәйданы 100 $см^2$, ә y — икенче ягы икән, $y = \frac{100}{x}$. Шуңа күрә бу табигый күренеш, $y = x^2$ моделен дә, $y = x^3$ моделен дә, $y = \frac{100}{x}$ моделен дә, һәм башка бик күп модельләрне өйрәнергә туры киләчәк, ә аларның структуралары шул ук: тигезләмәнең сул ягында — y үзгәрешлесе, ә уң ягында x үзгәрешлесе кергән нинди дә булса аңлатма. Мондый модельләр өчен «сызыкча» сүзен төшереп калдырып, «функция» сүзен саклыйлар.

Искәрмә. Без математикада яңа төшенчәләр, яңа атамалар белән эшнең ничек торганын инде берничә тапкыр искә алдык. Еш кына шулай була: яңа төшенчә кертелә, аның белән эшлиләр, ә соңрак, математиканы тагын да ныграк өйрәнү барышында, әлеге төшенчәне ачыкларга, үстерергә кирәклеген сизә башлыйлар. «Бердәйлек» төшенчәсе белән нәкъ шулай булды. «Функция» төшенчәсе белән дә шул ук хәл. Без әле аңа бик озак иләшербез, тәҗрибә тупларбыз, бу төшенчә белән эшләрбез, шуннан соң гына аның төгәл билгеләнешенә килеп җитәрбез (бу 9 нчы сыйныфта булачак).

Бу параграфта без $y = x^2$ функциясен карарбыз һәм аның графигын төзербез.

Бәйсез x үзгәрешлесенә берничә конкрет кыйммәт бирәбез һәм бәйле y үзгәрешлесенең тиңдәшле кыйммәтен исәплибез ($y = x^2$ формуласы буенча):

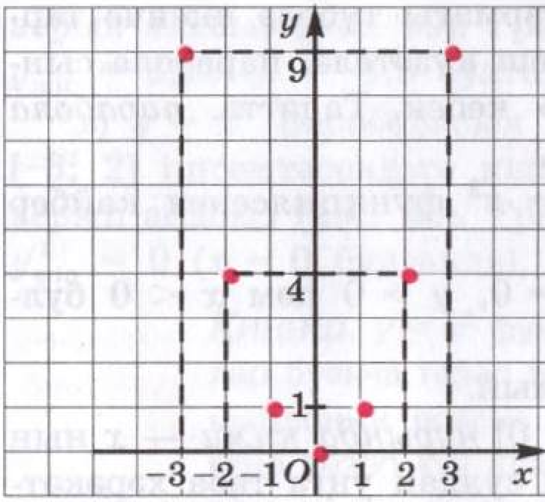
әгәр $x = 0$ булса, $y = 0^2 = 0$;
әгәр $x = 1$ булса, $y = 1^2 = 1$;
әгәр $x = 2$ булса, $y = 2^2 = 4$;
әгәр $x = 3$ булса, $y = 3^2 = 9$;
әгәр $x = -1$ булса, $y = (-1)^2 = 1$;
әгәр $x = -2$ булса, $y = (-2)^2 = 4$;
әгәр $x = -3$ булса, $y = (-3)^2 = 9$.

Кыскача әйткәндә, без шундый таблицаны төзедек:

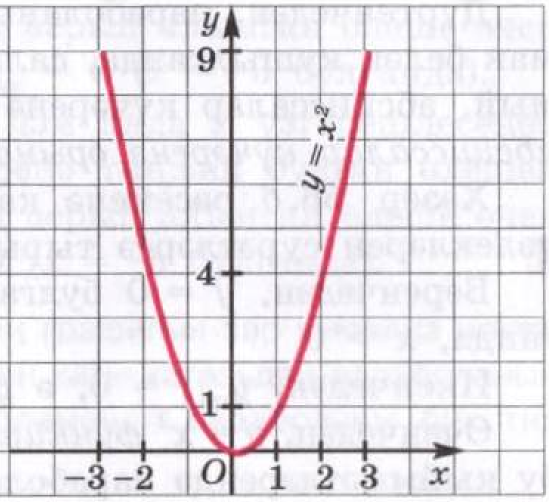
x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9

xOy координаталар яссылыгында (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (−1; 1), (−2; 4), (−3; 9) нокталарын төзибез (рәс. 56, *а*). Әлеге нокталар нинди сызыкта яталар, аны сызабыз (рәс. 56, б). Бу сызыкны **парабола** дип атыйлар.

Билгеле инде, x аргументына мөмкин булган барлык кыйммәтләрне биреп, y үзгәрешлесенең тиңдәш кыйммәтләрен исәпләсәк һәм табылган (x; y) нокталарын төзесәк, идеаль чишелеш табылыр иде. Ул чагында график абсолют төгәл, камил булыр иде. Тик бу хәлнең булуы мөмкин түгел, чөнки мондый нокталар чиксез күп. Шуңа күрә математиклар чикләнгән сандагы нокталар күплеген алалар, аларны координаталар яссылыгында төзиләр һәм бу нокталар арасында нинди сызык ятуын



Рәс. 56, *а*



Рәс. 56, *б*

карыйлар. Әгәр бу сызыкның контурлары җитәрлек дәрәҗәдә аңлаешлы икән (әйтик, 7 нче параграфтагы 1 нче мисалдагы кебек), бу сызыкны үткәрәләр. Ялгышырга мөмкин түгелме? Шунсыз булмый. Шуңа күрә, хаталардан качу мөмкинлекләре булсын өчен, математиканы тагын да тирәнрәк өйрәнәләр.

Ә хәзер 56, *б* рәсемгә карап, параболаның геометрик үзлекләрен сурәтләргә тырышыйк.

сүзлекчә

парабола

параболаның симметрия күчәре

параболаның тармаклары

параболаның түбәсе

Беренчедән, параболаның симметрияле икәнен билгелибез. Чынлап та, әгәр x күчәреннән югарырак аңа параллель итеп теләсә нинди туры үткәрсәк, бу туры параболаны y күчәреннән тигез ераклыкта, әмма аның төрле якларында урнашкан ике ноктада кисеп уза (рәс. 57). Ә бит 56, *а* рәсемендә тамгаланган (1; 1) һәм (−1; 1); (2; 4) һәм (−2; 4); (3; 9) һәм (−3; 9) нокталары турында да шуны ук әйтергә мөмкин. Моны y күчәре $y = x^2$ **параболасының симметрия күчәре** яисә *парабола y күчәренә карата симметрияле* дип әйтәләр.

Икенчедән, симметрия күчәре параболаны ике өлешкә бүлә, бу өлешләрне, гадәттә, **параболаның тармаклары** диләр.

Өченчедән, параболаның аерым ноктасы бар, анда ике тармак килеп тоташа һәм ул параболаның симметрия күчәрендә ята — бу (0; 0) ноктасы. Аның үзенчәлекләрен исәпкә алып, аны махсус атама белән — **параболаның түбәсе** дип атыйлар.

Дүртенчедән, параболаның бер тармагы түбәдә икенче тармак белән кушылганда, салмак көчеш күзәтелә, парабола сынмый, абсциссалар күчәренә «сыена» кебек. Гадәттә, *парабола абсциссалар күчәренә орына*, диләр.

Хәзер 56,*б* рәсеменә карап, $y = x^2$ функциясенең кайбер үзлекләрен сурәтләргә тырышыйк.

Беренчедән, $y = 0$ булганда, $x = 0$, $y > 0$ һәм $x < 0$ булганда, $x > 0$.

Икенчедән, $y_{\min} = 0$, ә $y_{\max}$ булмый.

Өченчедән, $y = x^2$ *функциясе* $(-\infty;\ 0]$ *нурында кими* — x ның бу кыйммәтләрендә парабола буенча сулдан уңга таба хәрәкәтләнеп, без «таудан төшәбез». Ә инде $y = x^2$ *функциясе* $[0;\ +\infty)$ *нурында үсә* — x ның бу кыйммәтләрендә парабола буенча сулдан уңга хәрәкәтләнеп, без «тауга күтәреләбез».

1 нче мисал. $y = x^2$ функциясенең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга:

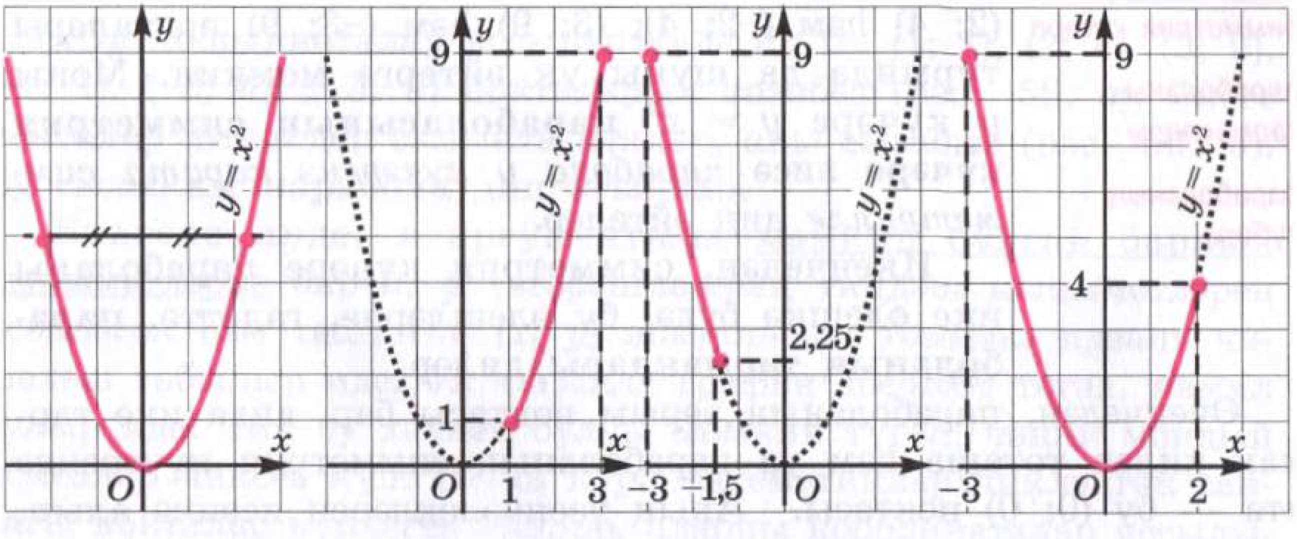
а) $[1;\ 3]$ кисемтәсендә;

б) $[-3;\ -1{,}5]$ кисемтәсендә;

в) $[-3;\ 2]$ кисемтәсендә.

Чишү. а) $y = x^2$ параболасын төзибез һәм аның x үзгәрешлесенең $[1;\ 3]$ кисемтәсендәге кыйммәтләренә тиңдәш булган өлешен аерып алабыз (рәс. 58). Графикның аерып алынган өлеше өчен $y_{\min} = 1$ ($x = 1$ булганда), $y_{\max} = 9$ ($x = 3$ булганда).

б) $y = x^2$ параболасын төзибез һәм анда x үзгәрешлесенең $[-3;\ -1{,}5]$ кисемтәсендәге кыйммәтләренә тиңдәш булган өлешен



Рәс. 57 Рәс. 58 Рәс. 59 Рәс. 60

аерып алабыз (рәс. 59). Графикның аерып алынган өлеше өчен $y_{min} = 2{,}25$ ($x = -1{,}5$ булганда), $y_{max} = 9$ ($x = -3$ булганда).

в) $y = x^2$ параболасын төзибез һәм анда x үзгәрешлесенең $[-3; 2]$ кисемтәсендәге кыйммәтләренә тиңдәш булган өлешен аерып алабыз (рәс. 60). Графикның аерып алынган өлеше өчен $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда), $y_{max} = 9$ ($x = -3$ булганда).

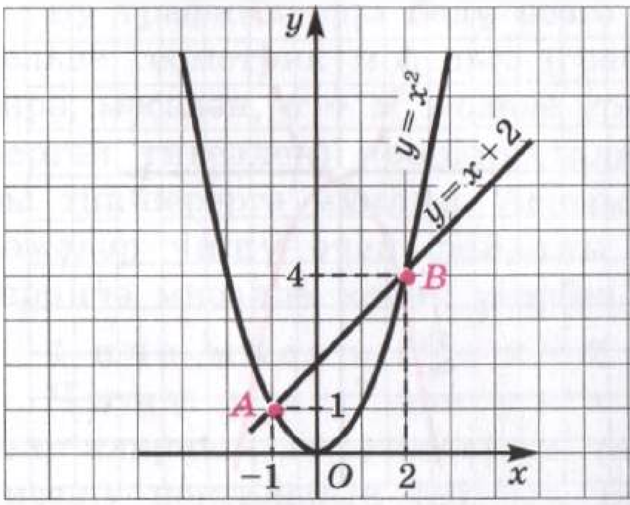
Киңәш. $y = x^2$ функциясенең графигын һәр мисалда нокталар буенча төзеп тормас өчен, каты кәгазьдән параболаның шаблонын ясагыз. Аның ярдәмендә параболаны бик тиз генә төзеп куя аласыз.

Искәрмә. Сезгә парабола шаблоны ясауны тәкъдим итеп, без $y = x^2$ функциясен сызыкча $y = kx + m$ функциясе белән беркадәр тигезлибез. Сызыкча функциянең графигы — туры сызык һәм аны сурәтләү өчен кулланыла торган линейка бу графикның шаблоны булып тора да инде. Хәзер менә сез $y = kx + m$ функциясе графигының да шаблонын булдырдыгыз.

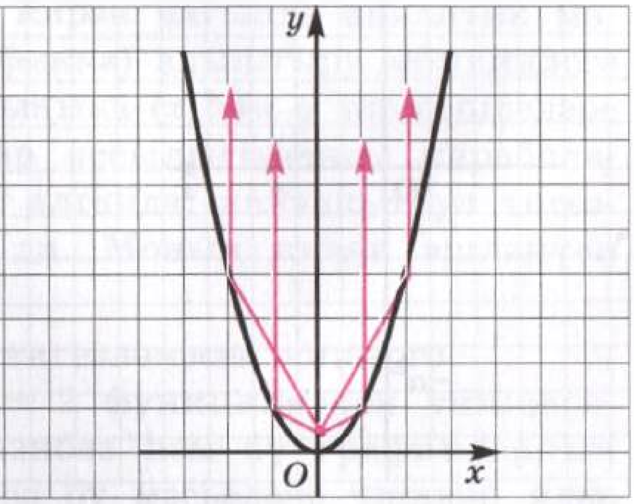
2 нче мисал. $y = x^2$ параболасы белән $y = x + 2$ турысының кисешү сызыкларын табыгыз.

Чишү. Бер үк координаталар системасында $y = x^2$ параболасын һәм $y = x + 2$ турысын төзибез (рәс. 61). Алар A һәм B нокталарында кисешәләр, һәм бу нокталарның координаталарын сызымда билгеләү һич тә кыен түгел: A ноктасы өчен $x = -1$, $y = 1$, ә B ноктасы өчен $x = 2$, $y = 4$.

Җавап: $y = x^2$ параболасы һәм $y = x + 2$ турысы ике ноктада: $A(-1; 1)$ һәм $B(2; 4)$ нокталарында кисешәләр.



Рәс. 61

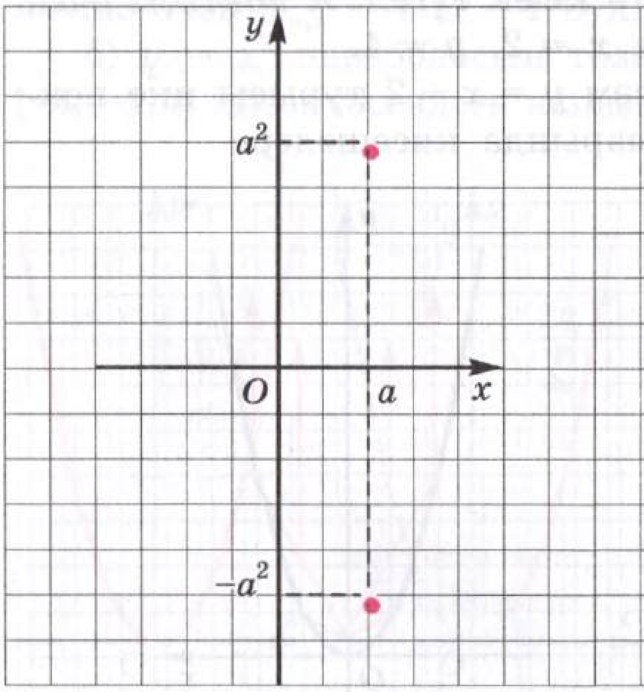


Рәс. 62

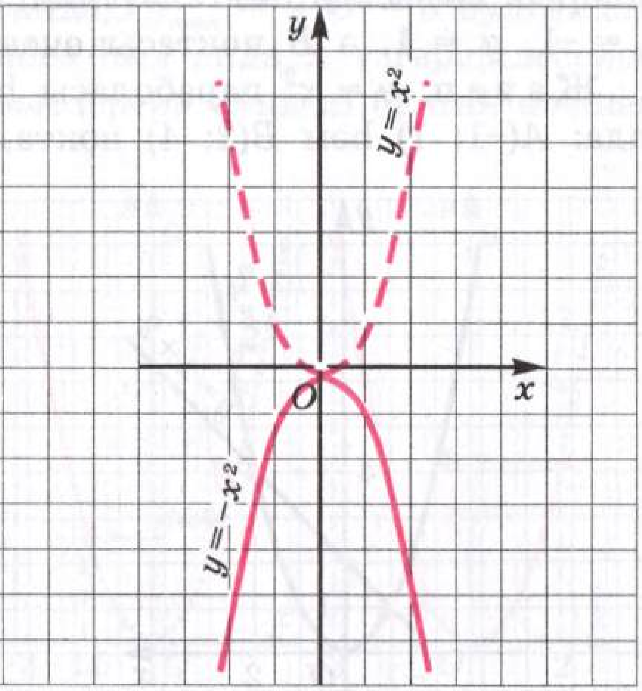
Мөһим искәрмә. Без сезнең белән әлегә кадәр сызым буенча кыю гына нәтиҗәләр чыгарып килдек. Әмма математиклар сызымнарга бик үк ышанып җитми. 61 нче рәсемдә парабола белән турының кисешү нокталарын билгеләп, математик гадәттә үз-үзен тикшерә: чынлап та (−1; 1) ноктасы параболада да, турыда да ята микән; (2; 4) ноктасы параболада яткан кебек, турыда да ята микән? Моның өчен *A* һәм *B* нокталарының координаталарын турының һәм параболаның тигезләмәләренә куеп исәпләргә һәм ике очракта да дөрес тигезлек килеп чыкканына ышанырга кирәк. 2 нче мисалда ике очракта да дөрес тигезлекләр килеп чыга. Мондый тикшерүләрне сызымның дөреслеге бераз шикләндергән очракта эшлиләр.

3 нче мисал. $y = -x^2$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. $y = x^2$ һәм $y = -x^2$ функцияләрен чагыштырабыз. Аргументның кыйммәте бер үк, мәсәлән, $x = a$ булганда, беренче функция a^2, икенче функция $-a^2$ кыйммәтен ала. Димәк, беренче функциянең графигында $(a;\ a^2)$ ноктасы, ә икенче функция графигында $(a;\ -a^2)$ ноктасы була. Бу нокталар xOy координаталар яссылыгында абсциссалар күчәренә карата симметрияле урнашканнар (рәс. 63). Димәк, $y = -x^2$ функциясенең графигы $y = x^2$ функциясе графигына абсцис-



Рәс. 63



Рәс. 64

салар күчәренә карата симметрияле була (рәс. 64). Шул ук түбәле һәм шул ук симметрия күчәрле парабола, тик парабола түбәләре өскә түгел, аска таба юнәлгән. ▣

Йомгаклап, параболаның үзенчәлекле бер үзлеген билгеләп үтик. Әгәр $y = x^2$ параболасын өслекне чагылдыручы экран дип исәпләсәк, $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ ноктасында яктылык чыганагы урнаштырсак, парабола-экраннан чагылган нурлар параллель яктылык бәйләме хасил итәләр (рәс. 62). $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ ноктасын *параболаның фокусы* дип атыйлар. Бу идея автомобильләрдә кулланыла: фараның чагылдыручы өслеге парабола формасында, ә лампочканы фокуска урнаштыралар — шунлыктан фарадан яктылык шактый ук еракка тарала.

§ 38. ТИГЕЗЛӘМӘЛӘРНЕ ГРАФИК ЮЛ БЕЛӘН ЧИШҮ

Функцияләрнең графиклары турындагы белемнәребезгә йомгак ясап карыйк. Без сезнең белән түбәндәге функцияләрнең графикларын төзергә өйрәндек:

$y = b$ (x күчәренә параллель туры);

$y = kx$ (координаталар башлангычы аша үтүче туры);

$y = kx + m$ (туры);

$y = x^2$, $y = -x^2$ (парабола).

Бу графикларны белү безгә кирәк чагында аналитик модельне геометрик модельгә (графикка) алыштыру мөмкинлеге бирә, мәсәлән, $y = x^2$ моделе урынына (x һәм y үзгәрешлеләре кергән тигезлек) координаталар яссылыгындагы параболаны тикшерергә мөмкин. Аерым алганда, кайвакыт ул тигезләмәләр чишү өчен файдалы да. Моның ничек эшләнүен берничә мисалда карап үтәрбез.

1 нче мисал. $x^2 = x + 2$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. $y = x^2$ һәм $y = x + 2$ функцияләрен тикшерәбез; аларның графикларын төзибез һәм бу графикларның кисешү нокталарын табабыз. Без бу мәсьәләне чишкән идек инде (37 нче параграфтагы 2 нче мисал һәм аңа тиңдәшле

61 нче рәс.). $y = x^2$ параболасы һәм $y = x + 2$ турысы $A(-1; 1)$ һәм $B(2; 4)$ нокталарында кисешәләр.

Ә ничек итеп $x^2 = x + 2$ тигезләмәсенең тамырларын, ягъни x ның x^2 һәм $x + 2$ аңлатмалары бер үк санлы кыйммәт ала торган кыйммәтләрен табарга? Бик гади итеп, бу кыйммәтләр табылды бит инде: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Болар — графикларыбыз кисешкән A һәм B нокталарының абсциссалары.

Җавап: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Чынлыкта без түбәндәге алгоритмнан файдаландык:

1. Тикшерү өчен $y = x^2$, $y = x + 2$ функцияләрен керттек (башка тигезләмә өчен, әлбәттә, икенче төрле функцияләр булачак).
2. Бер үк координаталар яссылыгында $y = x^2$, $y = x + 2$ функцияләренең графикларын төзедек.
3. Графикларның кисешү нокталарын таптык.
4. Кисешү нокталарының абсциссаларын таптык — болар тигезләмәләрнең тамырлары булды.

2 нче мисал. $x^2 - x + 4 = 0$ тигезләмәсен чишәргә.

Чишү. Биредә саналган алгоритмга тагын бер адым өстәргә (әзерлек адымы) туры киләчәк: тигезләмәне алгоритм эшләнгән рәвешкә туры китереп язарга кирәк. Бу язылыш $x^2 = x - 4$ рәвешендә. Хәзер алгоритмга туры китереп барасы гына калды.

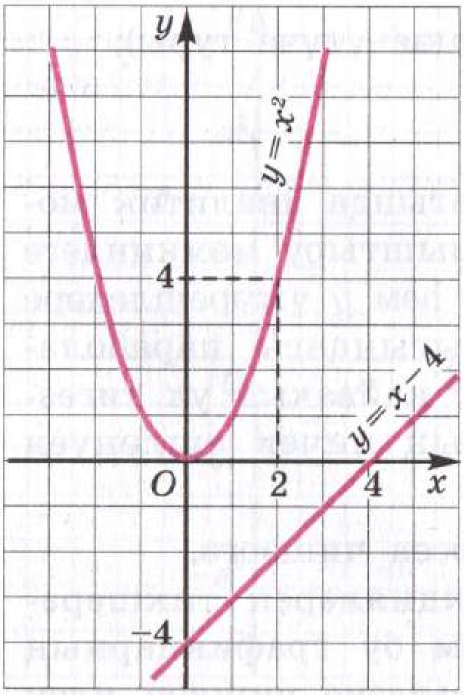
1) Ике функция кертәбез: $y = x^2$, $y = x - 4$.

2) Бер үк координаталар кучәрендә $y = x^2$ һәм $y = x - 4$ функцияләренең графикларын төзибез (рәс. 65).

3) Төзелгән парабола белән турының кисешү нокталары юк.

Сез ничек уйлыйсыз, әлеге геометрик факт безгә бирелгән алгебраик мәсьәлә (бирелгән тигезләмә) өчен нәрсәне аңлата икән? Аңладыгызмы? Ә хәзер үзегезнең фаразны җавапта язылган җөмлә белән чагыштырыгыз.

Җавап: тигезләмәнең тамырлары юк.



Рәс. 65

Искәрмә. 34 нче параграфта без инде $ax^2 + bx + c = 0$, (биредә a, b, c — саннар, $a \neq 0$) рәвешендәге квадрат тигезләмәләр дип аталучы тигезләмәләр була дип сөйләгән идек. Аларның тамырларын исәпләп табу махсус формулалар буенча башкарыла. Шулай булса да квадрат тигезләмәләрне без чиштек инде. Мәсәлән, 34 нче параграфта без $x^2 - 6x + 5 = 0$ квадрат тигезләмәсен тапкырлаучыларга таркату алымы белән чиштек. Ә әлеге параграфта без тагын ике квадрат тигезләмәне график юл белән чиштек. Болар — $x^2 - x - 2 = 0$ тигезләмәсе (1 нче мисалны кара; дөрес, анда тигезләмә башкача, $x^2 = x + 2$ рәвешендә язылган иде, тик бу барыбыр шул ук дигән сүз) һәм $x^2 - x + 4 = 0$ тигезләмәсе (2 нче мисал).

§ 39. МАТЕМАТИКАДА $y = f(x)$ ЯЗЫЛЫШЫ НӘРСӘНЕ АҢЛАТА

Нинди дә булса реаль процессны (хәлне) өйрәнгәндә, гадәттә, бу процесста катнашучы ике зурлыкка игътибар итәләр (катлаулырак процессларда ике генә түгел, ә өч, дүрт һ.б. зурлык катнаша, тик без хәзергә андый процессларны тикшермибез): аларның берсе бернәрсәгә дә бәйләнмичә үзлегеннән диярлек үзгәрә (андый үзгәрешлене ешрак x хәрефе белән билгелиләр), ә икенче зурлык x үзгәрешлесенең сайлап алынган кыйммәтләренә бәйле рәвештә кыйммәтләр ала (мондый бәйле үзгәрешлене ешрак y дип билгелиләр). Реаль процессның математик моделе булып y ның x ка бәйлелеген, ягъни x һәм y үзгәрешлеләре арасындагы бәйлелекне күрсәтүче язылыш тора.

Тагын бер кат исегезгә төшерәбез, хәзер без түбәндәге математик модельләрне өйрәндек: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Бу математик модельләр арасында уртаклык бармы? Бар! Аларның структурасы бертөрле: $y = f(x)$. Бу язылышны шулай аңларга кирәк: x үзгәрешлесе кергән $f(x)$ аңлатмасы бар, һәм без аның ярдәмендә y үзгәрешлесенең кыйммәтләрен табабыз.

Математикларның $y = f(x)$ язылышына өстенлек бирүе очраклы түгел. Әйтик, мәсәлән, $f(x) = x^2$ булсын, ягъни сүз

$y = x^2$ функциясе турында бара. Хәзер безгә аргументның берничә кыйммәтен һәм функциянең тиңдәшле кыйммәтләрен аерып күрсәтергә кирәк ди. Әлегә кадәр без болай яздык:

әгәр $x = 1$ булса, $y = 1^2 = 1$ була;

әгәр $x = -3$ булса, $y = (-3)^2 = 9$ була.

Ә инде $f(x) = x^2$ тамгаланышын кулланабыз икән, язылыш уңайлырак төс ала:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Шулай итеп, без математика теленең тагын бер фрагменты (кисәге) белән таныштык: «$x = 2$ ноктасында $y = x^2$ функциясенең кыйммәте 4 кә тигез була» диясе урынга «әгәр $f(x) = x^2$ булса, $f(2) = 4$» дип языла.

Ә менә кирегә күчерү мисалы.

Әгәр $f(x) = x^2$ булса, $f(-3) = 9$. Икенче төрле әйтсәк, $x = -3$ ноктасында $y = x^2$ функциясенең кыйммәте 9 га тигез.

1 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе бирелгән, биредә $f(x) = x^3$. Исәпләргә:

а) $f(1)$;
б) $f(-4)$;
в) $f(a)$;
г) $f(2a)$;
д) $f(a - 1)$;
е) $f(3x)$;
ж) $f(-x)$.

Чишү. Барлык очракларда да эшләү планы бер үк: $f(x)$ аңлатмасына x урынына аргументның җәя эчендә күрсәтелгән кыйммәтен куярга һәм тиңдәшле исәпләүләрне, үзгәрешләрне үтәргә кирәк.

а) $f(1) = 1^3 = 1$;
б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;
в) $f(a) = a^3$;
г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;
д) $f(a - 1) = (a - 1)^3$;
е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;
ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$.

Искәрмә. Билгеле инде, f хәрефе урынына башка хәрефне куярга мөмкин: (нигездә, латин алфавитыннан алына): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ һ.б.

2 нче мисал. Ике функция бирелгән: $y = f(x)$, биредә $f(x) = x^2$ һәм $y = g(x)$, биредә $g(x) = x^3$. Исбатларга:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $g(-x) = -g(x)$.

Чишү. а) $f(x) = x^2$ булганлыктан, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ була. Шулай итеп, $f(x) = x^2$, $f(-x) = x^2$, димәк, $f(-x) = f(x)$.

б) $g(x) = x^3$ булганлыктан, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Шулай итеп, $g(x) = x^3$, $g(-x) = -x^3$, ягъни $g(-x) = -g(x)$. ■

$y = f(x)$ рәвешендәге математик модель куллану бик күп очракларда уңайлы, аерым алганда, реаль процесс бәйсез үзгәрешленең төрле үзгәрү аралыкларында төрле формулалар белән сурәтләнгән очракта.

3 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе бирелгән, биредә

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \text{ булганда;} \\ x^2, & x \geqslant 0 \text{ булганда.} \end{cases}$$

а) исәпләргә: $f(-5)$, $f(-2)$, $f(1{,}5)$, $f(4)$, $f(0)$.

б) $y = f(x)$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. а) Нәрсә ул $f(-5)$? Бу бирелгән функциянең $x = -5$ ноктасындагы кыйммәте. Ләкин функция бер аңлатма белән түгел, ә ике: $2x$ һәм x^2 аңлатмалары белән бирелгән. Алардан ничек файдаланырга? Бу аргументның сайлап алынган кыйммәтенә бәйле. Без $x = -5$ не сайладык, ә -5 саны $x < 0$ тигезсезлеген канәгатьләндерә; бу очракта функция беренче юлда урнашкан аңлатма белән бирелә, ягъни $f(x) = 2x$. Ул чагында $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

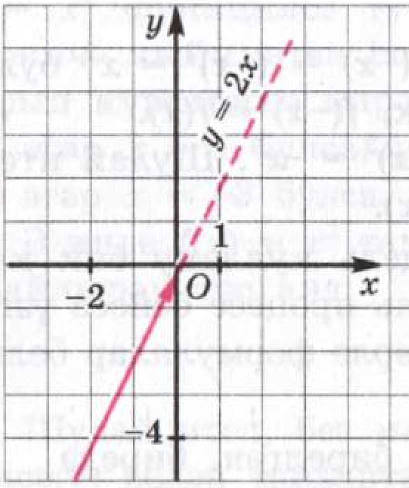
Шундый ук юл белән $f(-2)$ не исәплибез: әгәр $x = -2$ булса, $x < 0$, димәк, $f(x) = 2x$, ягъни $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

$f(1{,}5)$ не исәплибез, ягъни $y = f(x)$ функциясенең $x = 1{,}5$ ноктасындагы кыйммәтен эзлибез. Бу кыйммәт $x \geqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, һәм, димәк, функция икенче юлда торучы аңлатма, ягъни $f(x) = x^2$ белән бирелә. Шуңа күрә $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

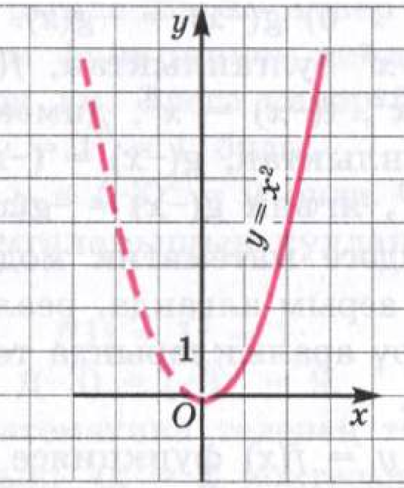
Нәкъ шулай итеп $f(4)$ не табабыз: әгәр $x = 4$ булса, $x \geqslant 0$ һәм, димәк, $f(x) = x^2$, ягъни $f(4) = 4^2 = 16$.

$f(0)$ не исәплисе калды. $x = 0$ кыйммәте $x \geqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, димәк, $f(x) = x^2$, ягъни $f(0) = 0^2 = 0$.

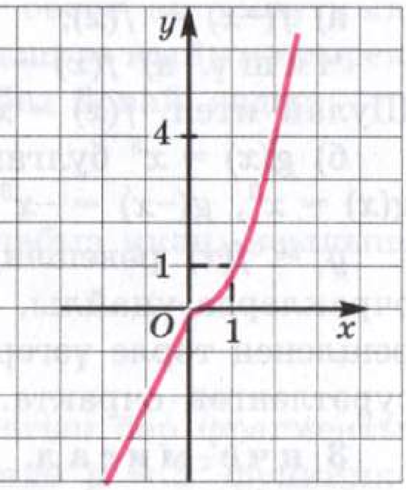
б) Без $y = 2x$ һәм $y = x^2$ функцияләренең графикларын төзи беләбез (рәс. 66 һәм 67). Бирелгән $y = f(x)$ функциясе $x < 0$ булганда, $y = 2x$ функциясенә туры килә — 66 нчы рәсемдә графикның бу өлеше аерып алынган. Бирелгән функция $y = f(x)$ $x \geqslant 0$ булганда, $y = x^2$ функциясенә туры килә —



Рәс. 66



Рәс. 67

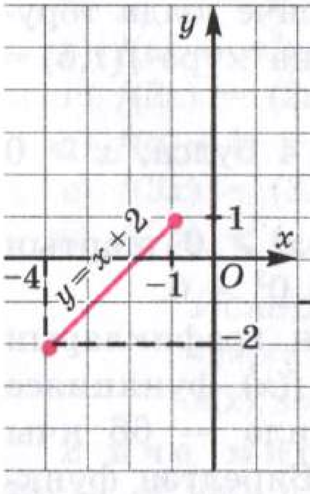


Рәс. 68

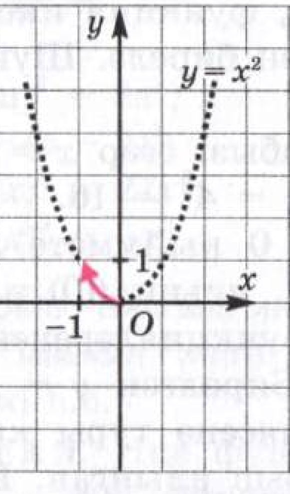
67 нче рәсемдә графикның бу өлеше бүленеп күрсәтелгән. Хәзер без бүленеп алынган ике өлешне бер үк координаталар системасында сурәтләсәк, $y = f(x)$ функциясенең соралган графигын табабыз (рәс. 68).

кисәкле функция

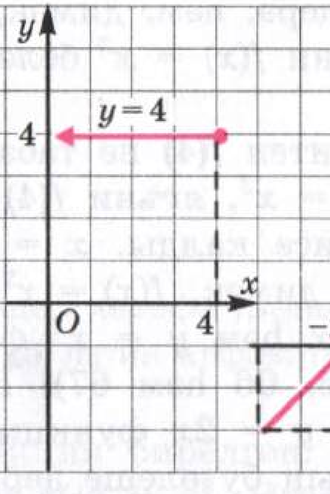
Билгеле, математиклар мондый графикларны болай озак төземиләр. Гадәттә барысы да бер үк координаталар системасында бергә үк эшләнә. Тик, билгеле инде, $y = 2x$ турысы тулысынча түгел, ә $x < 0$, ягъни $(-\infty; 0)$ аралыгында булганда алына. Парабола да тулысы белән түгел, ә $x \geqslant 0$, ягъни $[0; +\infty)$ аралыгында булганда алына. Менә шулай, «кисәкләп» тулы график төзелә дә. Шуңа күрә 3 нче мисалдагы кебек функцияләрне *кисәкле функцияләр* дип атыйлар.



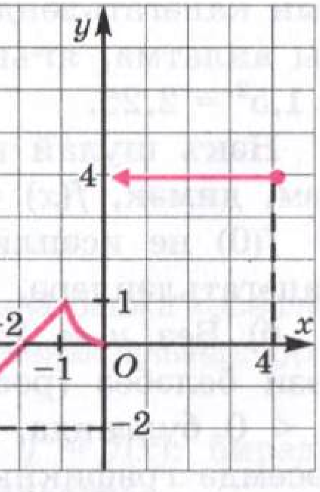
Рәс. 69



Рәс. 70



Рәс. 71



Рәс. 72

4 нче мисал. $y = f(x)$ функциясе бирелгән, биредә:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -4 \leqslant x \leqslant -1 \text{ булганда;} \\ x^2, & -1 < x \leqslant 0 \text{ булганда;} \\ 4, & 0 < x \leqslant 4 \text{ булганда.} \end{cases}$$

а) Исәпләргә: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$;

б) $y = f(x)$ функциясенең графигын төзергә.

Чишү. а) $x = -4$ кыйммәте $-4 \leqslant x \leqslant -1$ шартын канәгатьләндерә, ә бу очракта $f(x) = x + 2$. Шуңа күрә $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

$x = -2$ кыйммәте $-4 \leqslant x \leqslant -1$ шартын канәгатьләндерә, ә бу очракта $f(x) = x + 2$. Димәк, $f(-2) = -2 + 2 = 0$.

$x = -0,5$ кыйммәте $-1 < x \leqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, бу очракта $f(x) = x^2$. Димәк, $f(-0,5) = (-0,5)^2 = 0,25$.

$x = 0$ кыйммәте $-1 < x \leqslant 0$ шартын канәгатьләндерә, бу очракта $f(x) = x^2$. Димәк, $f(0) = 0^2 = 0$.

$x = 1$ кыйммәте $0 < x \leqslant 4$ шартын канәгатьләндерә, ә бу очракта $f(x) = 4$; аерым алганда $f(1) = 4$.

$x = 5$ кыйммәте бирелгән шартларның берсен дә канәгатьләндерми: беренчесен $-4 \leqslant x \leqslant -1$ дә, икенчесен $-1 < x \leqslant 0$ дә, өченчесен $0 < x \leqslant 4$ дә. Шуңа күрә $f(5)$ не без исәпли алмыйбыз, бу *мәсьәлә төгәл куелмаган.*

б) $y = f(x)$ функциясенең графигын «кисәкләп» төзибез. 69 нчы рәсемдә $y = x + 2$ функциясенең, биредә $x \in [-4; -1]$, графигы сурәтләнгән. 70 нче рәсемдә $y = x^2$ функциясенең, биредә $x \in (-1; 0]$, графигы, 71 нче рәсемдә $y = 4$ функциясенең, биредә $x \in (0; 4]$, графигы бирелгән. Ниһаять, 72 нче рәсемдә барлык «кисәкләр» бербөтен булып кушылганнар: $y = f(x)$ функциянең графигы төзелгән. ▣

сүзлекчә

графикны уку

функциянең билгеләнү өлкәсе

Менә шулай, таныш графиклар буенча, координаталар яссылыгында графикларны «кисәкләп» төзергә мөмкин.

72 нче рәсемдә төзелгән график ярдәмендә $y = f(x)$ функциясенең кайбер үзлекләрен тасвирлыйк — мондый тасвирлауны, гадәттә, *графикны уку* дип йөртәләр. Графикны уку — геометрик модельдән (график модельдән) сөйләмле модельгә (функциянең үзлекләрен сурәтләү) үзенчәлекле күчү ул. Ә гра-

фикны төзү — аналитик модельдән (ул 4 нче мисалның шартында күрсәтелгән) геометрик модельгә күчү.

Шулай итеп, $y = f(x)$ функциясенең графигын укуга керешәбез (72 рәс. кара).

1. Бәйсез үзгәрешле x -4 тән 4 кә кадәр барлык кыйммәтләрен «йөреп чыга». Башкача әйтсәк, x ның $[-4; 4]$ кисемтәсендәге һәр кыйммәте өчен $f(x)$ функциясенең кыйммәтен исәпләп чыгарырга мөмкин. $[-4; 4]$ — *функциянең билгеләнү өлкәсе*, диләр.

Ни өчен 4 нче мисалны чишкәндә без $f(5)$ не табу мөмкин түгел дидек? Чөнки $x = 5$ кыйммәте функциянең билгеләнү өлкәсендә ятмый.

2. $y_{min} = -2$ (бу кыйммәтенә функция $x = -4$ булганда ирешә); $y_{max} = 4$ (бу кыйммәткә функция $(0; 4]$ ярыминтервалының теләсә кайсы ноктасында ирешә).

3. $x = -2$ һәм $x = 0$ булганда, $y = 0$ була, бу нокталарда $y = f(x)$ функциясенең графигы x күчәрен кисеп уза.

4. Әгәр $x \in (-2; 0)$ яки $x \in (0; 4]$ икән, $y > 0$ була, бу аралыкларда $y = f(x)$ функциясенең графигы *x күчәреннән өстә* урнаша.

5. Әгәр $x \in [-4; -2)$ икән, $y < 0$ була; бу аралыкта $y = f(x)$ функциясенең графигы *x күчәреннән аста* урнаша.

6. Функция $[-4; -1]$ кисемтәсендә үсә, $[-1; 0]$ кисемтәсендә кими һәм $(0; 4]$ ярыминтервалында даими (үсми дә, кимеми дә) кала.

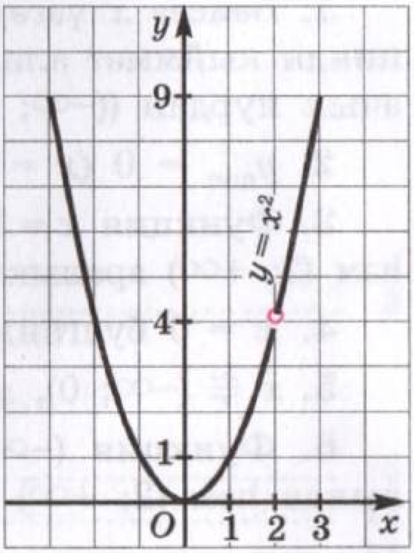
Без сезнең белән функцияләрнең яңа үзлекләрен өйрәнә барган саен, графикны уку процессы тагын да тулырак, эчтәлеклерәк һәм кызыклырак була барачак.

Шундый яңа үзлекләрнең берсен тикшерик, 4 нче мисалда китерелгән функциянең графигы өч тармактан (өч «кисәктән») тора. Беренче һәм икенче тармаклар ($y = x + 2$ турысының кисемтәсе һәм параболаның бер өлеше) уңышлы «кушылганнар»: кисемтә $(-1; 1)$ ноктасында тәмамлана, ә парабола участогы шул ук ноктада башланып китә. Ә менә икенче һәм өченче тармакларның «кушылуы» бик үк уңышлы түгел: өченче тармак (горизонталь туры «кисәге»)

өзлексез функция

өзелү ноктасы

(0; 0) ноктасында түгел, ә (0; 4) ноктасында башланып китә. Математиклар моны: «$y = f(x)$ функциясе $x = 0$ булганда (яки $x = 0$ ноктасында) *өзелә*», диләр. Әгәр функциянең өзелү нокталары булмаса, аны *өзлексез* функция диләр. Әйтик, без сезнең белән узган параграфларда танышкан барлык функцияләр дә ($y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$) — өзлексез функцияләр.



Рәс. 73

5 нче мисал. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ функциясе бирелгән. Аның графигын төзергә һәм укырга.

Чишү. Күргәнегезчә, бирелгән функция шактый ук катлаулы аңлатма белән бирелгән. Әмма математика — бердәм һәм төзек фән, аның бүлекләре бер-берсе белән тыгыз бәйләнгән. 7 нче бүлектә өйрәнгәннәребезне файдаланып, $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ алгебраик вакланмасын кыскартабыз. Табабыз:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2.$$

Шулай итеп, чыннан да $f(x) = x^2$. Дөрес, $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = x^2$ бердәйлегенең $x \neq 2$ булганда гына үтәлгәнен онытмаска кирәк.

Димәк, без, мәсьәләне үзгәртеп: $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ функциясе урынына $y = x^2$ функциясен, биредә $x \neq 2$, тикшерә алабыз.

xOy координаталар яссылыгында $y = x^2$ параболасын төзибез. Аны $x = 2$ турысы (2; 4) ноктасында кисеп уза. Тик шарт буенча, $x \neq 2$, димәк, параболаның (2; 4) ноктасын без тикшерүгә кертмибез, шуңа күрә сызымда аны ачык төстәге түгәрәк белән билгелибез. Шулай итеп, функциянең графигы төзелде — бу (2; 4) ноктасы «тишеп алынган» $y = x^2$ параболасы (рәс. 73).

$y = f(x)$ функциясенең үзлекләрен санауга, ягъни аның графигын укуга керешәбез.

1. Бәйсез x үзгәрешлесе $x = 2$ кыйммәтеннән башка теләсә нинди кыйммәт ала. Димәк, функциянең билгеләнү өлкәсе ике ачык нурдан ($(-\infty; 2)$ һәм $(2; +\infty)$) тора.

2. $y_{min} = 0$ ($x = 0$ булганда ирешелә), y_{max} булмый.

3. Функция $x = 2$ булганда ($x = 2$ ноктасында) өзелә; $(-\infty; 2)$ һәм $(2; +\infty)$ аралыкларында өзлексез.

4. $x = 0$ булганда, $y = 0$.

5. $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (0; 2)$ һәм $x \in (2; +\infty)$ булганда, $y > 0$.

6. Функция $(-\infty; 0]$ нурында кими, $[0; 2)$ ярыминтервалында һәм $(2; +\infty)$ ачык нурында үсә. ■

ТӨП НӘТИҖӘЛӘР

Математика телендә үзебезнең сүзлек запасын түбәндәге атамалар белән баеттык:
парабола, параболаның күчәре (симметрия күчәре), параболаның тармаклары, параболаның түбәсе;
өзлексез функция, функциянең өзелүе;
кисәкле функция;
функциянең билгеләнү өлкәсе;
графикны уку.

Без ике математик модель белән таныштык:
$y = x^2$,
$y = f(x)$.

Без түбәндәге нәтиҗәгә килдек:
$y = x^2$ функциясенең графигы парабола була.

Без $f(x) = g(x)$ рәвешендәге тигезләмәне график юл белән чишү алгоритмын эшләдек.

Ниһаять, сез кисәкле функцияләрнең графикларын төзү белән таныштыгыз.

ЭЧТӘЛЕК

Укытучы өчен кереш сүз 3

1 бүлек. МАТЕМАТИКА ТЕЛЕ. МАТЕМАТИК МОДЕЛЬ

§ 1. Санлы һәм алгебраик аңлатмалар 6
§ 2. Нәрсә ул математика теле 13
§ 3. Нәрсә ул математик модель 14
§ 4. Бер үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә 19
§ 5. Координаталар турысы 24

2 бүлек. СЫЗЫКЧА ФУНКЦИЯ

§ 6. Координаталар яссылыгы 29
§ 7. Ике үзгәрешлеле сызыкча тигезләмә һәм аның графигы 34
§ 8. Сызыкча функция һәм аның графигы 42
§ 9. $y = kx$ сызыкча функциясе 52
§ 10. Сызыкча функцияләр графикларының үзара урнашуы 54
Төп нәтиҗәләр 57

3 бүлек. ИКЕ ҮЗГӘРЕШЛЕЛЕ ИКЕ СЫЗЫКЧА ТИГЕЗЛӘМӘ СИСТЕМАСЫ

§ 11. Төп төшенчәләр 59
§ 12. Алыштырып кую юлы 64
§ 13. Алгебраик кушу юлы 67
§ 14. Реаль ситуацияләрнең математик модельләре буларак, ике үзгәрешлеле ике сызыкча тигезләмә системасы 70
Төп нәтиҗәләр 72

4 бүлек. НАТУРАЛЬ КҮРСӘТКЕЧЛЕ ДӘРӘҖӘ ҺӘМ АНЫҢ ҮЗЛЕКЛӘРЕ

§ 15. Нәрсә ул натураль күрсәткечле дәрәҗә 73
§ 16. Төп дәрәҗәләр таблицасы 76
§ 17. Натураль күрсәткечле дәрәҗәнең үзлекләре 79
§ 18. Бер үк күрсәткечле дәрәҗәләрне тапкырлау һәм бүлү 84
§ 19. Нуль күрсәткечле дәрәҗә 87
Төп нәтиҗәләр 88

5 бүлек. БЕРБУЫННАР. БЕРБУЫННАР БЕЛӘН АРИФМЕТИК ГАМӘЛЛӘР

§ 20. Бербуын төшенчәсе. Бербуынның стандарт рәвеше 89
§ 21. Бербуыннарны кушу һәм алу 91
§ 22. Бербуыннарны тапкырлау. Бербуынны натураль дәрәҗәгә күтәрү 95
§ 23. Бербуынны бербуынга бүлү 98
Төп нәтиҗәләр 101

6 бүлек. КҮПБУЫННАР. КҮПБУЫННАР БЕЛӘН АРИФМЕТИК ОПЕРАЦИЯЛӘР

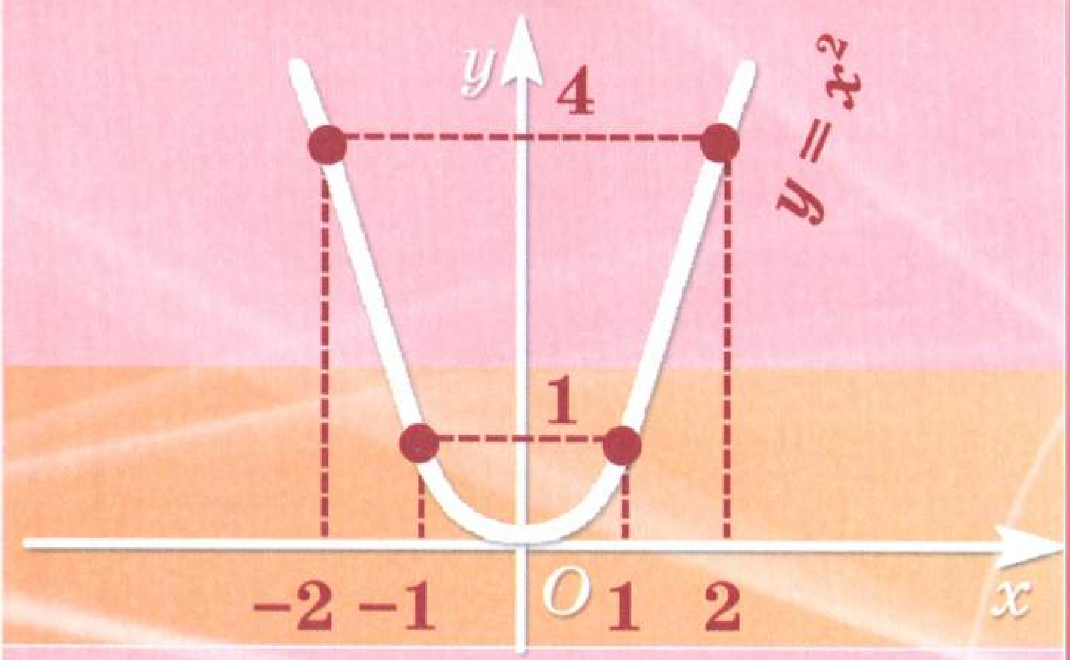
§ 24. Төп төшенчәләр 102
§ 25. Күпбуыннарны кушу һәм алу 105
§ 26. Күпбуынны бербуынга тапкырлау 107
§ 27. Күпбуынны күпбуынга тапкырлау 112
§ 28. Кыскача тапкырлау формулалары 113
§ 29. Күпбуынны бербуынга бүлү 119
Төп нәтиҗәләр 121

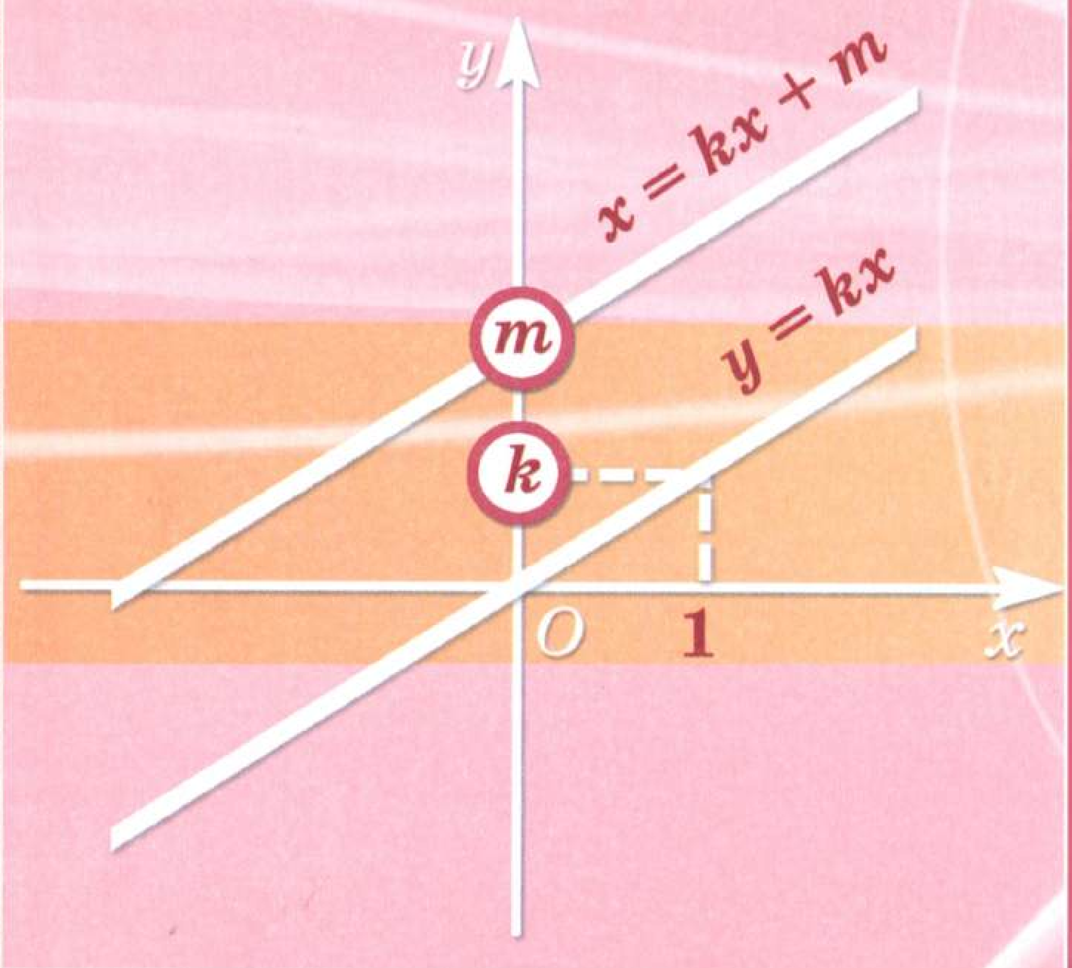
7 бүлек. КҮПБУЫННАРНЫ ТАПКЫРЛАУЧЫЛАРГА ТАРКАТУ

§ 30. Нәрсә ул күпбуыннарны тапкырлаучыларга таркату һәм ул ни өчен кирәк 122
§ 31. Уртак тапкырлаучыны җәя алдына чыгару 125
§ 32. Группалау ысулы 128
§ 33. Күпбуыннарны тапкырлаучыларга кыскача тапкырлау формулаларын кулланып таркату 131
§ 34. Күпбуыннарны тапкырлаучыларга төрле алымнар кулланып таркату 133
§ 35. Алгебраик вакланмаларны кыскарту 137
§ 36. Бердәйлекләр 141
Төп нәтиҗәләр 142

8 бүлек. $y = x^2$ ФУНКЦИЯСЕ

§ 37. $y = x^2$ функциясе һәм аның графигы 143
§ 38. Тигезләмәләрне график юл белән чишү 149
§ 39. Математикада $y = f(x)$ язылышы нәрсәне аңлата 151
Төп нәтиҗәләр 158





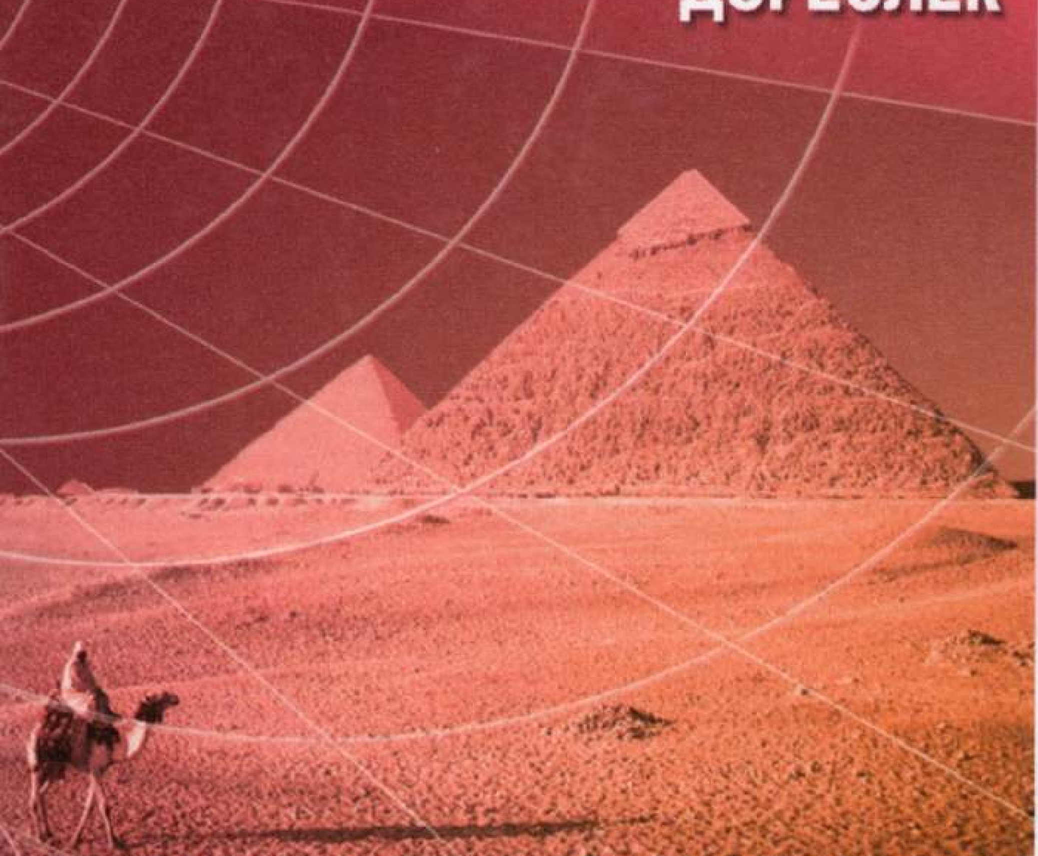
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Алгебра

1 кисәк
ДӘРЕСЛЕК

7